ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN**

**LÊ THỊ OANH**

# MỘT SỐ VẤN ĐỀ CỦA GIẢI TÍCH NGẪU NHIÊN TRÊN KHÔNG GIAN BANACH XÁC SUẤT

**Chuyên ngành :** **Lý thuyết xác suất và thống kê toán học**
**Mã số :** **62460106**

**TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC**

**Hà Nội - 2022**

Công trình được hoàn thành tại: Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học quốc gia Hà nội.

Người hướng dẫn khoa học: 1. GS.TSKH. Đặng Hùng Thắng

2. PGS. TS. Tạ Công Sơn.

Phản biện 1: ...............................

Phản biện 2: ...............................

Phản biện 3: ...............................

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng cấp .................. chấm luận án tiến sĩ họp tại trường Đại học Khoa học Tự nhiên vào hồi giờ ngày tháng năm 20...

Có thể tìm hiểu luận án tại:

- Thư viện Quốc gia Việt Nam
- Trung tâm Thông tin - Thư viện, Đại học Quốc gia Hà Nội

**Hà Nội - 2022**

# MỞ ĐẦU

**1. Lí do chọn đề tài**
**1.1.** Không gian Banach xác suất và lý thuyết toán tử ngẫu nhiên đóng vai trò quan trọng trong phát triển lý thuyết, thực hành xác suất và thống kê. Chính vì vậy mà các khái niệm cơ bản trong xác suất như không gian - không gian các biến ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Banach chỉ là trường hợp riêng của không gian Banach xác suất đã thu hút nhiều nhà khoa học nghiên cứu và mở rộng. Quan trọng hơn nữa là không gian Banach xác suất và lý thuyết toán tử ngẫu nhiên có rất nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau như trong toán tài chính, cơ học, vật lý,...
Lý thuyết martingale nghiên cứu những vấn đề liên quan đến lý thuyết trò chơi nhưng về sau được phát triển thành một lĩnh vực toán học chặt chẽ, trở thành một mô hình toán học quan trọng có nhiều ứng dụng trong thống kê, phương trình vi phân, toán kinh tế. Đặc biệt, gần đây đã có nhiều ứng dụng thú vị trong chứng khoán, thu hút khá nhiều nhà toán học quan tâm. Về phương diện xác suất, martingale là sự mở rộng của tổng các biến ngẫu nhiên độc lập kì vọng không.
**1.2.** Khái niệm không gian định chuẩn ngẫu nhiên được nêu bởi B.Schweizer, A.Sklar [10] sau đó được trình bày với một phiên bản mới bởi Tiexin Guo năm 1999 [9] dưới tên là không gian module với chuẩn ngẫu nhiên, với ( )-tôpô, một tôpô tương thích với hội tụ theo xác suất trong không gian các biến ngẫu nhiên. Đến năm 2009, với nhu cầu của toán tài chính, Damir Filipovic, Michael Kupper, Nicolas Vogelpoth [1] đã trình bày không gian xác suất ngẫu nhiên nhưng với - tôpô lồi địa phương.

**1.3.**Ý tưởng về không gian Banach xác suất mới xuất hiện gần đây nhưng đã được nhiều nhà khoa học quan tâm, ta sẽ điểm qua một số kết quả về vấn đề này: T.Guo đã đưa ra định nghĩa về không gian Banach xác suất và có một số nghiên cứu quan trọng về toán tử ngẫu nhiên và chứng minh một phiên bản của định lý Han-Banach cho trường hợp ngẫu nhiên( xem [2], [9]).
Với các lí do trên chúng tôi quyết định chọn đề tài nghiên cứu cho luận án của mình là: **Một số vấn đề của giải tích ngẫu nhiên trên không gian Banach và không gian Banach xác suất**.

**2. Mục đích nghiên cứu**

Luận án nghiên cứu về sự hội tụ của các dãy toán tử ngẫu nhiên, dãy martingale toán tử ngẫu nhiên trong không gian Banach.
Luận án nghiên cứu về "đa tạp quán tính trung bình bình phương", tìm điều kiện đảm bảo cho sự tồn tại của nó đối với một lớp các phương trình vi phân ngẫu nhiên tựa tuyến tính trên một không gian Hilbert thực khả li.
Luận án nghiên cứu sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm của bài toán Cauchy với phần tuyến tính là toán tử sinh của một $C$-nửa nhóm bị chặn mũ.

**3. Đối tượng nghiên cứu**

Đối tượng nghiên cứu của luận án là trường các biến ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Banach và dãy các toán tử ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Bannach.

**4. Phạm vi nghiên cứu**

Luận án nghiên cứu các định lý về hội tụ cho dãy các martingale toán tử ngẫu nhiên trong không gian Banach.

Tìm điều kiện đảm bảo cho sự tồn tại của nó đối với một lớp các phương trình vi phân ngẫu nhiên tựa tuyến tính và bài toán Cauchy với phần tuyến tính là toán tử sinh của một $C$-nửa nhóm bị chặn mũ.

**5. Phương pháp nghiên cứu**

Luận án sử dụng các kĩ thuật của xác suất, giải tích, giải tích ngẫu nhiên, các công cụ của martingale để chứng minh các định lí hội tụ. Một số bổ đề quan trọng như: Bổ đề Borel-Cantelli, lý thuyết toán tử tất định, sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và tính chất đẳng cự của tích phân Ito ... cũng được sử dụng để chứng minh các kết quả.

**6. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn**

Ý nghĩa khoa học: góp phần làm phong phú thêm các kết quả và sự hiểu biết về hội tụ của chuỗi ngẫu nhiên,các biến ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Banach, cũng như các kết quả của toán tử ngẫu nhiên;Lớp các phương trình vi phân ngẫu nhiên tựa tuyến tính và bài toán Cauchy với phần tuyến tính là toán tử sinh của một $C$-nửa nhóm bị chặn mũ.

Ý nghĩa thực tiễn: luận án góp phần phát triển lý thuyết của toán tử ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Banach của lý thuyết xác suất.

**7. Tổng quan và cấu trúc luận án**

**7.1. Tổng quan luận án.** Không gian Banach xác suất và lý thuyết toán tử ngẫu nhiên trước hết là sự phát triển tự nhiên của lý thuyết giải tích hàm tất định. Hơn nữa, các khái niệm cơ bản trong xác suất như không gian - không gian các biến ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Banach chỉ là trường hợp riêng của không gian Banach xác suất. Ma trận ngẫu nhiên-một lĩnh vực đang phát triển mạnh mẽ trên thế giới hiện nay, không có gì khác hơn là trường hợp hữu hạn chiều của toán tử ngẫu nhiên, quá trình ngẫu nhiên là trường hợp riêng của hàm nhận giá trị trong không gian Banach xác suất. Quan trọng hơn nữa là không gian Banach xác suất và lý thuyết toán tử ngẫu nhiên có rất nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau như trong toán tài chính, cơ học, vật lý,. . .

Năm 2009, Damir Filipovic, Michael Kupper, Nicolas Vogelpoth [1] đã trình bày không gian xác suất ngẫu nhiên nhưng với - tôpô lồi địa phương. Đưa ra định lý tách siêu phẳng, nghiên cứu tính liên tục dưới, khả vi dưới biểu diễn đối ngẫu Fenchel- Moreau của một hàm -lồi, và nêu một số áp dụng để nghiên cứu độ đo rủi ro entropic trong toán tài chính.

Năm 2010, T. Guo [3] đã đưa ra mối liên hệ giữa hai tôpô trên, và một số kết quả về không gian đối ngẫu và định lý Han-Banach.

Năm 2013, Xia Zhang [11], đã nghiên cứu một số tính chất của các toán tử trên không gian này.

Năm 2015, Tiexin Guo, Shien zhao, Xiaolin zeng, [5] đã nghiên cứu một số tính chất về giải tích lồi trên không gian Banach xác suất và các áp dụng cho toán tài chính.

Năm 2012-2013, Xia Zhang và Ming liu đã đưa ra khái niệm nửa nhóm các toán tử và nghiên cứu một số tính chất của nửa nhóm.

Năm 2017, T. Guo, S. Zhao, X. Zeng, [4]-[6] đã nghiên cứu một số tính chất về giải tích lồi trên không gian Banach xác suất và các áp dụng cho toán tài chính.

Năm 2018-2019 , T.Guo và các tác giả đã đưa ra các kết quả về điểm bất động ngẫu nhiên [7] và nghiên cứu một số tính chất giải tích trên không gian Banach xác suất này [8].

Trong lý thuyết toán tử ngẫu nghiên được nghiên cứu bởi nhóm của giáo sư Đặng Hùng Thắng từ khá sớm với các kết quả đầu tiên từ năm 1987 ([12]) sau đó được phát triển trong nhiều bài báo khác (xem [12-13], [16])

Trong năm 2019, DH. Thang, TC. Son, N.Thinh, [23] nghiên cứu các tính chất giải tích của hàm nhận giá trị trong không gian Banach xác suất, lý thuyết toán tử, nửa nhóm toán tử và thu được phiên bản ngẫu nhiên của định lý Hile-Yosida.

Trong luận án này chúng tôi tiếp tục nghiên cứu về sự hội tụ của dãy các toán tử ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Banach.

Trong luận văn này chúng tôi nghiên cứu về hội tụ hoàn toàn, hội tụ hoàn toàn trung bình, và đánh giá tốc độ hội tụ của chuỗi các trường hiệu martingale nhận giá trị trong không gian $p$-khả trơn.

Các kết quả của luận án đã được báo cáo tại Seminar bộ môn và tại các hội nghị: Hội nghị toán học toàn quốc lần thứ 14 (Nha trang, 2018); Hội Nghị Khoa Học Toàn quốc" Một số chủ đề thời sự trong toán học và ứng dụng" (Viện nghiên cứu cao cấp về Toán và Trường ĐH Khoa học Tự nhiên-ĐHQG Hà Nội, 2021), , và đã được đăng và nhận đăng ở các tạp chí:VNU Journal of Science( Mathematics – Physics),Random operators and stochastic equations.

**7.2 Cấu trúc luận án.** Ngoài phần mở đầu, Kết luận, Danh mục các bài báo của nghiên cứu sinh liên quan đến luận án và tài liệu tham khảo, luận án được trình bày trong ba chương.

Chương 1 trình bày các khái niệm về toán tử ngẫu nhiên, kì vọng có điều kiện của biến ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Banach, các định nghĩa về tích phân Riemann, tích phân ngẫu nhiên Ito, khái niệm về không gian Banach. Ngoài ra, một số dạng hội tụ của trường các biến ngẫu nhiên, toán tử ngẫu nhiên cũng được trình bày.

Chương 2 gồm hai mục, mục 2.1 ta thiết lập các điều kiện hội tụ của dãy các toán tử ngẫu nhiên, dãy hiệu martingale toán tử ngẫu nhiên bị chặn trong không gian Banach. Mục 2.2 đưa ra khái niệm “đa tạp quán tính trung bình bình phương”, tìm điều kiện đảm bảo cho sự tồn tại của nó đối với một lớp các phương trình vi phân ngẫu nhiên tựa tuyến tính trên một không gian Hilbert thực khả li.

Chương 3 gồm hai mục, mục 3.1 đưa ra khái niệm $C$-nửa nhóm bị chặn mũ của các đồng cấu module liên tục. Mục 3.2 trình bày các kết quả về sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm của bài toán Cauchy với phần tuyến tính là toán tử sinh của một $C$-nửa nhóm bị chặn mũ.

# Chương 1

# Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này chúng tôi trình bày ngắn gọn các khái niệm về toán tử ngẫu nhiên,toán tử ngẫu nhiên độc lập, kì vọng, kì vọng có điều kiện của biến ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Banach, các định nghĩa về tích phân Riemann, tích phân ngẫu nhiên Ito, khái niệm về không gian Banach xác suất. Ngoài ra, một số dạng hội tụ của trường các biến ngẫu nhiên, toán tử ngẫu nhiên cũng được trình bày. Trong toàn bộ luận án, các hằng số dương $C$ xuất hiện trong các công thức toán không nhất thiết phải giống nhau trong mỗi lần xuất hiện.

## 1.1 Toán tử ngẫu nhiên trên không gian Banach khả ly

### 1.1.1 Toán tử ngẫu nhiên

Trong chương này, ta xét $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ là không gian xác suất đầy đủ, , $\mathbb{K}$ là trường số thực $\mathbb{R}$ hoặc trường số phức $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}$ là tập các số nguyên dương, $L_0(\Omega, \mathbb{K})$ là đại số trên $\mathbb{K}$ gồm các lớp tương đương của các biến ngẫu nhiên $\mathbb{K}$-giá trị $\mathscr{F}$-đo được đối với các phép nhân vô hướng và phép cộng thông thường giữa các lớp tương đương. Dễ thấy, $L_0(\Omega, \mathbb{R})$ được sắp thứ tự từng phần theo nghĩa $\xi \leq \eta$ khi và chỉ khi $\xi^0(\omega) \leq \eta^0(\omega)$ $\mathbf{P}-$h.c.c trong đó $\xi^0$ và $\eta^0$ lá các phần tử đuọc chọn tùy ý trong các lớp tương đương $\xi$ và $\eta$ thuộc $L_0(\Omega, \mathbb{R})$ tương ứng.

Hơn nữa, từ [19] ta nhận thấy $L_0(\Omega, \mathbb{R})$ là một dàn (lattice) đầy đủ theo nghĩa: với mọi tập con $H$ bị chặn trên (hoặc bị chặn dưới) đều có cận trên đúng (hoặc cận dưới đúng) mà ta ký hiệu là $\bigvee H$ (hoặc $\bigwedge H$ tương ứng).

Giả sử $\xi$ và $\eta$ là các phần tử thuộc $L_0(\Omega, \mathbb{R})$ ta nói $\xi < \eta$ nếu $\xi \leq \eta$ và $\xi \neq \eta$. Hơn nữa, với $A \in \mathscr{F}$ ta nói $\xi > \eta$ trên $A$ nếu $\xi^0(\omega) > \eta^0(\omega)$ $\mathbf{P}-$h.c.c trên $A$ trong đó $\xi^0$ và $\eta^0$ tương ứng là các phần tử đại diện tùy ý của các lớp tương đương $\xi$ và $\eta$. Đặc biệt, ta ký hiệu $L_0^+(\Omega) = \left\{\xi \in L_0(\Omega, \mathbb{R}) | \xi \geq 0 \text{ trên } \Omega\right\}$.
Cuối cùng, ta lưu ý rằng, sự hội tụ trong $L_0(\Omega, \mathbb{K})$ được hiểu là sự hội tụ theo xác suất, và ta viết p-$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ nếu dãy $(x_n) \in L_0(\Omega, \mathbb{K})$ hội tụ về $x$ trong $L_0(\Omega, \mathbb{K})$.

**Định nghĩa 1.1** ([15]). Cho $X, Y$ là các không gian Banach khả ly. Ánh xạ tuyến tính liên tục A từ $X$ vào $L_0^Y(\Omega)$ được gọi là *toán tử ngẫu nhiên* từ $X$ vào $Y$.

**Định nghĩa 1.2** ([15]). Toán tử ngẫu nhiên $A : X \to Y$ được gọi là *bị chặn* nếu tồn tại một biến ngẫu nhiên thực $k(\omega)$ sao cho với mỗi $x \in X$ ta có

$$\|Ax(\omega)\| \leq k(\omega)\|x\| \quad \text{h.c.c}$$

Theo [15, Định lý 3.1] luôn tồn tại ánh xạ $T_A : \Omega \longrightarrow L(X; Y)$ sao cho

$$Ax(\omega) = T_A(\omega)x \quad \text{h.c.c} \tag{1.1}$$

Dễ thấy $T_A$ là duy nhất.
Cho $A$ là toán tử ngẫu nhiên bị chặn từ không gian Banach khả li $X$ vào không gian Banach khả li $Y$. Theo [15] ta có thể định nghĩa toán tử tuyến tính liên tục $\tilde{A} : L_0^X(\Omega) \to L_0^X(\Omega)$ là mở rộng của $A$ như sau:

- Nếu $u$ là một biến ngẫu nhiên $X$-giá trị có dạng $u(\omega) = \sum_{i=1}^{n} 1_{E_i} x_i$, thì $\tilde{A}u = \sum_{i=1}^{n} 1_{E_i} A x_i$.

- Nếu $u \in L_0^X(\Omega)$ và $\{u_n, n \geq 1\}$ là một dãy các biến ngẫu nhiên đơn giản $X$-giá trị thỏa mãn $p \lim_{n\to\infty} u_n = u$ thì tồn tại giới hạn $p \lim_{n\to\infty} \tilde{A}u_n$. Hơn nữa, giới hạn này không phụ thuộc vào việc chọn các dãy $\{u_n, n \geq 1\}$ và lúc này ta ký hiệu là $\tilde{A}u$.

Từ đây, để đơn giản ta viết $Au$ thay cho $\tilde{A}u$ và $Au$ được gọi là tác động của $A$ lên biến ngẫu nhiên $X$-giá trị $u$.

**Bổ đề 1.1.** *Cho $A$ là toán tử ngẫu nhiên bị chặn và $Ax(\omega) = T(\omega)x$ h.c.c. Khi đó, tồn tại $u \in L_0^{\mathbb{X}}(\Omega)$ sao cho $Ax(\omega) = T(\omega)x$.*

**Định lý 1.1.** *1. Nếu $\{A_n; n \geq 1\}$ là hội tụ về $A$ theo xác suất và họ $\{\|T_n\|; n \geq 1\}$ bị chặn theo xác suất, thì $\{A_n u; n \geq 1\}$ là hội tụ về $Au$ theo xác suất với mọi $u \in L_0^X(\Omega)$.*

*2. Nếu $\{A_n; n \geq 1\}$ là hội tụ về $A$ h.c.c. và họ $\{\|T_n\|; n \geq 1\}$ bị chặn h.c.c., thì $\{A_n u; n \geq 1\}$ là hội tụ về $Au$ h.c.c. với mọi $u \in L_0^X(\Omega)$.*

**Hệ quả 1.1.** *1. Nếu $\{A_n; n \geq 1\}$ là hội tụ đều về $A$ theo xác suất, thì $\{A_n u; n \geq 1\}$ là hội tụ về $Au$ theo xác suất với mọi $u \in L_0^X(\Omega)$.*

*2. Nếu $\{A_n; n \geq 1\}$ là hội tụ đều về $A$ h.c.c., thì $\{A_n u; n \geq 1\}$ là hội tụ về $Au$ h.c.c. với mọi $u \in L_0^X(\Omega)$.*

**Định nghĩa 1.3.** Cho $X, Y$ là các không gian Banach thực khả ly, Giả sử $A, A_n$ $(n \geq 1)$ là các toán tử ngẫu nhiên từ $X$ vào $Y$. Khi đó

i) $A_n$ được gọi là *hội tụ hầu chắc chắn tới $A$* và viết $A_n \xrightarrow{\text{h.c.c}} A$ khi $n \to \infty$ nếu

$$A_n(x) \xrightarrow{\text{h.c.c}} A(x) \text{ với mọi } x \in X.$$

ii) *$A_n$ được gọi là hội tụ tới $A$ theo trung bình cấp $p > 0$* (hay ngắn gọn là hội tụ theo $\mathcal{L}_p$) khi $n \to \infty$ và ta viết $A_n \xrightarrow{\mathcal{L}_p} A$ khi $n \to \infty$ nếu:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\|A_n(x) - A(x)\|^p = 0 \text{ với mọi } x \in X.$$

**Định lý 1.2.** *Cho $V$ là không gian định chuẩn và $A : V \to X$ là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó*

*i) $A$ là liên tục khi và chỉ khi $A$ là bị chặn theo xác suất.*

*ii) Nói chung, nếu $A$ liên tục thì không suy ra được $A$ bị chặn.*

**Ví dụ 1.1.** Cho $H$ là không gian Hilbert,, $V = H, \mathcal{X} = L_0^H(\Omega)$ và $(\xi_n)$ là dãy Gaussi chuẩn $N(0,1)$. Với mỗi $x \in H$ ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(x, e_n)e_n$ hội tụ hầu chắc chắn trong $H$. Xác đinh ánh xạ $A : V \to \mathcal{X}$ như sau $Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(x, e_n)e_n$. Ta thấy $A$ tuyến tính và liên tục.

### 1.1.2 Kỳ vọng có điều kiện

Cho không gian xác suất đầy đủ $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ và không gian Banach khả ly thực $\mathcal{X}$, $u : \Omega \to \mathcal{X}$ là biến ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Banach $\mathcal{X}$ (gọi tắt là biến ngẫu nhiên $\mathcal{X}$-giá trị). *Kì vọng* của biến ngẫu nhiên $u$ được định nghĩa là tích phân Bochner của $u$ (nếu tồn tại) và được kí hiệu là $\mathbf{E}(u)$ hoặc $\mathbf{E}u$.

**Định nghĩa 1.4** (xem [60], trang 179)**.** Cho $u : \Omega \to \mathcal{X}$ là biến ngẫu nhiên $\mathcal{X}$-giá trị khả tích Bochner và $\mathcal{G}$ là một $\sigma$-đại số con của $\mathcal{F}$. *Kì vọng có điều kiện* của biến ngẫu nhiên $u$ đối với $\sigma$-đại số $\mathcal{G}$ là biến ngẫu nhiên $\mathcal{X}$-giá trị, ký hiệu là $\mathbf{E}(u|\mathcal{G})$ và thỏa mãn 2 điều kiện:
(i) $\mathbf{E}(u|\mathcal{G})$ là $\mathcal{G}$-đo được,
(ii) $\mathbf{E}(\mathbf{E}(u|\mathcal{G})I(A)) = \mathbf{E}(uI(A))$ với mọi $A \in \mathcal{G}$.

**Mệnh đề 1.1** (xem [60], trang 179)**.** *Cho $u : \Omega \to \mathcal{X}$ là biến ngẫu nhiên $\mathcal{X}$-giá trị khả tích Bochner và $\mathcal{G}$ là một $\sigma$-đại số con của $\mathcal{F}$. Khi đó kì vọng có điều kiện $\mathbf{E}(u|\mathcal{G})$ tồn tại.*

Chú ý rằng, biến ngẫu nhiên $\mathcal{X}$-giá trị $u$ khả tích Bochner khi và chỉ khi $\mathbf{E}\|u\| < \infty$. Vì thế, nếu $\mathbf{E}\|u\| < \infty$ thì tồn tại kì vọng có điều kiện $\mathbf{E}(u|\mathcal{G})$ với mọi $\sigma$-đại số $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Các tính chất về kì vọng có điều kiện của biến ngẫu nhiên $\mathcal{X}$-giá trị có thể xem trong các tài liệu [60] và [61].

**Định nghĩa 1.5** ([14])**.** Cho $u$ là biến ngẫu nhiên có kỳ vọng $(X \in L_1)$. Kỳ vọng có điều kiện của biến ngẫu nhiên khả tích $u$ đối với $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$ ký hiệu là $\mathbf{E}(u|\mathcal{A})$ là một biến ngẫu nhiên $M$ thỏa mãn:

1) $M$ là $\mathcal{A}$-đo được;

2) Với mọi $A \in \mathcal{A}$ ta có $\displaystyle\int_A MdP = \int_A udP$

Sự tồn tại và duy nhất của $\mathbf{E}(u|\mathcal{A})$ được chứng minh như sau: Xét hàm tập

$$A \mapsto Q(A) = \int_A udP, A \in \mathcal{A}$$

Dễ thấy $Q$ là một độ đo có dấu trên $\mathcal{A}$ và $P(A) = 0 \to Q(A) = 0$. Theo định lý $\mathrm{R} - \mathrm{N}$ tồn tại duy nhất biến ngẫu nhiên $M$ là $\mathcal{A}$ - đo được và $Q(A) = \int_A MdP$ tức là

$$Q(A) = \int_A udP \to \int_A MdP = \int_A udP$$

**Bổ đề 1.2.** *Cho $B$ là toán tử ngẫu nhiên bị chặn từ không gian Banach khả ly $X$ vào không gian Banach khả ly $Y$, $Bx = T_B x$ h.c.c với mỗi $x \in X$, và $\mathcal{G}$ là sub-$\sigma$-đại sô của $\mathscr{F}$. Khi đó, với mỗi $\varepsilon > 0$, ta có*

$$\mathbf{P}(\mathbf{E}(\|Bu\||\mathcal{G}) > \varepsilon) \leq \mathbf{P}(\mathbf{E}(\|T_B\|\|u\||\mathcal{G}) > \varepsilon/r) + \mathbf{P}(\|u\| > r).$$

**Bổ đề 1.3.** *Cho $A$ là toán tử ngẫu nhiên bị chặn, $\mathcal{G}$ là $\sigma$-đại số con của $\mathscr{F}$ và $\mathbf{E}(Ax|\mathcal{G}) = 0$ với mọi $x \in X$. Khi đó, với mọi $u \in \mathcal{G}$ ta có $\mathbf{E}(Au|\mathcal{G}) = 0$.*

**Định nghĩa 1.6.** Cho $A$ là toán tử ngẫu nhiên bị chặn từ không gian Banach khả ly $X$ vào không gian Banach khả ly $Y$ và ta ký hiệu $\mathscr{F}(A)$ là $\sigma$-đại số sinh bởi họ $\{Ax, x \in X\}$. Ta đạt $\mathscr{F}_n = \sigma\{\mathscr{F}(A_i), i \leq n\}$. Khi đó, họ các toán tử ngẫu nhiên bị chặn $\{A_n, n \geq 1\}$ được gọi là *một dãy Martingale gồm các toán tử ngẫu nhiên bị chặn* nếu $\mathbf{E}(A_{n+1}x|\mathscr{F}_n) = A_n x$ với mọi $x \in X, n \geq 1$.

### 1.1.3 Không gian Banach có tính chất Radon-Nikodym

**Định nghĩa 1.7.** Lấy $\mu : \mathcal{F} \to \mathcal{X}$ là *một hàm tập $\mathcal{X}$-giá trị $\sigma$-cộng tính.*

- $\mu$ được gọi là *có biến phân bị chặn* nếu biến phân toàn phần
$$V_\mu = \sup\{\sum_{k=1}^{n} \|\mu(A_k)\| : A_k \in \mathcal{F}, \Omega = \cup_{n=1}^{n} A_k, \{A_k\}_{k=1}^{n} \text{ là rời nhau}\}$$
là hữu hạn.
- $\mu$ được gọi là *liên tục tuyệt đối với $P$* nếu với mỗi $A \in \mathcal{F}$, $\mu(A) = 0$ mỗi khi $P(A) = 0$.

**Định nghĩa 1.8.** ( [3]) Không gian Banach $X$ gọi là có tính chất Radon-Nikodym(R-N), nếu mọi hàm tập $\mu$ là $\sigma$-cộng tính, nhận giá trị trong $X$ và có biến phân bị chặn (tức là,$V_\mu(\Omega) = \sup\{\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)/A_k \in \mathcal{F}, A_k \text{ đôi một rời nhau}\} < +\infty$) liên tục theo $\mathbf{P}$ đều có một biểu diễn tích phân, nói cách khác, tồn tại $f \in L_1^X(\Omega)$ sao cho
$$\mu(A) = \int_A f(s)P(d(s)) \quad \text{với mọil} \quad A \in \mathcal{F}.$$

**Định lý 1.3.** *([3]) Cho không gian xác suất $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ và không gian Banach $X$. Khi đó với dãy Martingale$\{\xi_n, \mathscr{F}_n, n \geq 1\}$ $X$-giá trị thì các phát biểu sau là tương đương:*

1. *Nếu $\sup_{n\geq 1} \mathbf{E}\|\xi_n\| < \infty$ thì tồn tại $\xi \in L_1^{\mathcal{X}}(\Omega)$ sao cho $\xi = \lim_{n\to\infty} \xi_n \quad h.c.c.$*
2. *Nếu $\sup_{n\geq 1} \mathbf{E}\|\xi_n\|^p < \infty$ $(1 < p < \infty)$ thì tồn tại $\xi \in L_p^{\mathcal{X}}(\Omega)$ sao cho $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\|\xi_n - \xi\|^p = 0$.*
3. *Không gian $X$ có tính chất Radon-Nikodym tương ứng với không gian xác suất $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$.*

## 1.2 Tích phân ngẫu nhiên của hàm ngẫu nhiên nhận giá trị trên không gian Banach khả ly

### 1.2.1 Tích phân ngẫu nhiên Riemann

**Định nghĩa 1.9.** Cho hàm $f : [a, b] \to \mathbf{S}$. Khi đó, $f$ được gọi là khả tích Riemann trên $[a, b]$ nếu tồn tại $I$ thuộc vào $S$ để có: với $\varepsilon$ và $\lambda$ là các số thỏa mãn $\lambda < 1$, tồn tại số dương $\delta(\varepsilon, \lambda)$ sao cho
$$\mathbf{P}\left\{\omega \in \Omega \mid \left\| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i - I \right\|(\omega) < \varepsilon \right\} > 1 - \lambda$$
trong đó $\mathcal{P} = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n\}$ là một phân hoạch hữu hạn nào đó, và $\xi_i \in [x_i - 1, x_i]$ $(1 \leq i \leq n$ ) chọn tùy ý thỏa $\lambda(\mathcal{P}) < \delta(\varepsilon, \lambda)$.

Hơn nữa, ta gọi $I$ là tích phân Riemann của $f$ đối với $(\varepsilon, \lambda)$ - tôpô trên $[a, b]$ và ký hiệu là $\int_a^b f(t)dt.$

**Mệnh đề 1.2.** *Giả sử $f : [a, b] \to \mathbf{S}$ là một hàm liên tục sao cho $\bigvee_{t\in[a,b]} \|f(t)\| \in L_+^0(\mathcal{F})$. Khi đó, $f$ khả tích Riemann theo $(\varepsilon, \lambda)$ - tôpô trên $[a, b]$. Hơn nữa, nếu $\bigvee_{t\in[a,b]} \|f(t)\| \in L^2(\mathcal{F}, R)$ thì $f$ khả tích Riemann theo chuẩn $\|\cdot\|_2$ trên $[a, b]$.*

**Mệnh đề 1.3.** *Giả sử $f:[a,b]\to\mathbf{S}$ là một hàm khả vi sao cho $\bigvee_{t\in[a,b]}\|f(t)\|\in L^0_+(\mathcal{F})$. Khi đó, nếu $f'$ khả tích Riemann trên $[a,b]$ và*

$$\bigvee\left\{\left\|\frac{f(t_1)-f(t_2)}{t_1-t_2}\right\| \mid t_1,t_2\in[a,b] \text{ với } t_1\neq t_2\right\}\in L^0_+(\mathcal{F}),$$

*thì $f(b)-f(a)=\displaystyle\int_a^b f'(t)dt$.*

**Nhận xét 1.1** ([33]). Ta nhận thấy rằng ánh xạ $f:[a,b]\to\mathcal{X}$ là $L^0$-Lipschitz trên $[a,b]$ khi và chỉ khi ánh xạ $f$ thỏa mãn

$$\vee\left\{\left\|\frac{f(t_1)-f(t_2)}{t_1-t_2}\right\| : t_1,t_2\in[a,b] \text{ và } t_1>t_2\right\}\in L^0_+(\mathscr{F}).$$

### 1.2.2 Tích phân ngẫu nhiên Ito

**Định nghĩa 1.10.** Tích phân ngẫu nhiên của $\Phi\in\Lambda_2(K_Q,H)$ ứng với $K$-giá trị $Q$-Wiener $W_t$ là thác triển tuyến tính đẳng cự duy nhất của ánh xạ $\Phi(\cdot)\to\displaystyle\int_0^T\Phi(s)dW_s$ từ lớp các quá trình cơ bản bị chặn vào $L^2(\Omega,H)$ thành một ánh xạ từ $\Lambda_2(K_Q,H)$ vào $L^2(\Omega,H)$ sao cho ảnh của $\Phi(t)=\phi 1_{\{0\}}(t)+\sum_{j=0}^{n-1}\phi_j 1_{(t_j,t_{j+1}]}(t)$ là $\sum_{j=0}^{n-1}\phi_j\left(W_{t_{j+1}}-W_{t_j}\right)$.

Với $\Phi\in\Lambda_2(K_Q,H)$, ta định nghĩa tích phân ngẫu nhiên $\displaystyle\int_0^t\Phi(s)dW_s, 0\le t\le T$ bởi công thức $\displaystyle\int_0^t\Phi(s)dW_s=\int_0^T\Phi(s)1_{[0,t]}(s)dW_s$

**Định lý 1.4.** *Tích phân ngẫu nhiên $\Phi\to\displaystyle\int_0\Phi(s)dW_s$ ứng với quá trình $K$-giá trị $Q$-Wiener $W_t$ là một phép đẳng cự giữa $\Lambda_2(K_Q,H)$ và không gian các martingale trung bình khả tích liên tục $\mathscr{M}^2_T(H)$, tức là*

$$\mathbf{E}\left\|\int_0^t\Phi(s)dW_s\right\|_H^2=\mathbf{E}\int_0^t\|\Phi(s)\|^2_{\mathscr{L}_2(K_Q,H)}ds<\infty$$

*với $t\in[0,T]$.*

*Biến phân toàn phương của tích phân ngẫu nhiên $\displaystyle\int_0^t\Phi(s)dW_s$ và quá trình tăng ứng với $\left\|\displaystyle\int_0^t\Phi(s)dW_s\right\|_H^2$ được cho bởi*

$$\left\langle\left\langle\int_0\Phi(s)dW_s\right\rangle\right\rangle_t=\int_0^t\left(\Phi(s)Q^{1/2}\right)\left(\Phi(s)Q^{1/2}\right)^*ds.$$

*và*

$$\begin{aligned}\left\langle\int_0\Phi(s)dW_s\right\rangle_t&=\int_0^t\operatorname{tr}\left(\left(\Phi(s)Q^{1/2}\right)\left(\Phi(s)Q^{1/2}\right)^*\right)ds\\&=\int_0^t\|\Phi(s)\|^2\mathscr{L}_2(K_Q,H)\,ds.\end{aligned}$$

## 1.3 Không gian Banach xác suất

### 1.3.1 Đồng cấu RN modul

**Định nghĩa 1.11** ([33]). Một cặp $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ được gọi là một *RN module* trên $\mathbb{K}$ có cơ sở $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ nếu $\mathcal{X}$ là một module trái đối với đại số $L_0(\Omega, \mathbb{K})$ và $\|\cdot\|$ là một ánh xạ từ $\mathcal{X}$ vào $L_0^+(\Omega)$ thỏa mãn các điều kiện sau:

(1) $\|p\| = 0$ khi và chỉ khi $p = \theta$ (phần tử không của $\mathcal{X}$);

(2) $\|\xi p\| = |\xi| \cdot \|p\|, \ \forall \xi \in L_0(\Omega, \mathbb{K})$ và $p \in \mathcal{X}$;

(3) $\|p + q\| \leq \|p\| + \|q\|, \ \forall p.q \in \mathcal{X}$.

Khi đó, ánh xạ $\|\cdot\| : \mathcal{X} \to L_0^+(\Omega)$ được gọi là một $L_0$-chuẩn trên $\mathcal{X}$.

Dễ thấy, $(L_0(\Omega, \mathbb{K}), |\cdot|)$ là một RN module trên $\mathbb{K}$ có cơ sở là $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$.

Tiếp theo, với $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ là một RN module trên $\mathbb{K}$ có cơ sở $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, ta nhắc nhắc lại tôpô cảm sinh bởi $L_0$-chuẩn trên $\mathcal{X}$ (xem [33]) như sau: Với các số thực dương tùy ý $\varepsilon$ và $\lambda$ thỏa mãn $0 < \lambda < 1$, ta đặt $N_\theta(\varepsilon, \lambda) = \{x \in X \mid P\{\omega \in \Omega \mid \|x\|(\omega) < \varepsilon\} > \lambda\}$.
Khi đó $\{N_\theta(\varepsilon, \lambda) \mid \varepsilon > 0, \quad 0 < \lambda < 1\}$, là một cơ sở địa phương tại $\theta$ đối với tôpô tuyến tính Hausdorff nào đó. Tôpô tuyến tính này thông thường được gọi là $(\varepsilon, \lambda)$-tôpô. Trong luận án này, ta luôn giả sử $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ được gắn với $(\varepsilon, \lambda)$-tôpô.

**Nhận xét 1.2** ([33]). i) Việc xây dựng $(\varepsilon, \lambda)$ - tôpô cho một *RN* module kết thừa từ ý tưởng Schweizer và Sklar cho không gian metric xác suất.

ii) Một dãy $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ thuộc $\mathcal{X}$ hội tụ theo $(\varepsilon, \lambda)$ - tôpô đến $x \in \mathcal{X}$ khi và chỉ khi $\{\|x_n - x\|, n \in \mathbb{N}\}$ hội tụ theo xác suất $\mathbf{P}$ về 0.

iii) $(\varepsilon, \lambda)$ -tôpô trên $(L_0(\mathcal{F}, K), |\cdot|)$ trùng với tôpô hội tụ theo xác suất.

**Mệnh đề 1.4.** *Với $u, v \in X, A, B \in \mathscr{F}, A \cap B = \emptyset$ ta có*

$$\|1_A u + 1_B v\| = 1_A\|u\| + 1_B\|v\|$$

**Định nghĩa 1.12.** Cho $X$ là không gian xác suất định chuẩn. Khi đó

i) Một dãy $(u_n) \subset X$ là hội tu tới $u \in X$ nếu $\|u_n - u\|$ hội tu đến 0 trong $L_0(\Omega)$.

ii) Một dãy $(u_n) \subset X$ là dãy Cauchy nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ ta có

$$\lim_{n,m\to\infty} \mathbf{P}\left(\|u_n - u_m\| > \varepsilon\right) = 0.$$

iii) $X$ được gọi là không gian Banach xác suất nếu mọi dãy Cauchy $(u_n) \subset X$ là hội tụ.

**Ví dụ 1.2.** Cho Cho $X$ là không gian Banach xác suất với chuẩn $\|.\|_X$ và $V$ là tập con của $L_0^X(\Omega)$. Với mỗi$\xi \in L_0(\Omega), u, v \in L_0^X(\Omega)$ xác định $u + v$ như sau:
$(u + v)(\omega) = u(\omega) + v(\omega)$ và $\xi u$ là $(\xi u)(\omega) = \xi(\omega)u(\omega)$. Ký hiệu $\mathcal{V}$ là tập của $X$- biến ngẫu nhiên $u$ có dạng

$$u = \sum_{i=1}^{n} \xi_i v_i, \quad \xi \in L_0(\Omega), v_i \in V, n = 1, 2, ...$$

Khi đó $\mathcal{V}$ là một *RN* modul với chuẩn xác định như sau $\|u\|(\omega) = \|u(\omega)\|_X$. Bao đóng $\mathcal{V}$ của $L_0^X(\Omega)$ là đầy đủ *RN* modul với chuẩn xác định như sau: $\|u\|(\omega) = \|u(\omega)\|_X$. Khi đó, $L_0^X(\Omega)$ là *RN* modul đầy đủ.

**Định nghĩa 1.13.** Giả sử $X$ là không gian Banach xác suất. Với $p > 0$ định nghĩa

$$X^p = \{u \in X : \mathbf{E}\|u\|^p < \infty\}.$$

**Định lý 1.5.** *Với $p \geqslant 1$, $X^p$ là không gian Banach với chuẩn* $\|u\|_p = (\mathbf{E}\|u\|^p)^{1/p}$.

**Định nghĩa 1.14.** Giả sử $X$ là không gian Banach xác suất, $V$ là không gian metric. Khi đó

i) Ánh xạ $\Phi : V \to X$ được gọi là *đóng* nếu với mỗi $(u_n) \in V$ sao cho $\lim u_n = u, \lim \Phi u_n = g$, ta có $u \in V$ và $g = \Phi u$.

ii) Ánh xạ $\Phi : V \to X$ được gọi là *liên tục* nếu với mỗi $(u_n) \in V$ sao cho $\lim u_n = u \in V$, ta có $\lim \Phi u_n = \Phi u$.

iii) Đồng cấu module $\Phi : \mathscr{D}(\Phi) \to X$ gọi là *bị chặn hầu chắc chắn* (bị chặn h.c.c) nếu tồn tại biến ngẫu nhiên $\xi \in L_0^+(\Omega)$ sao cho

$$\|\Phi u\| \leqslant \xi \|u\|, \quad \forall u \in \mathscr{D}(\Phi). \tag{1.2}$$

iv) Đồng cấu module $\Phi : \mathscr{D}(\Phi) \to X$ được gọi là đóng nếu với mỗi dãy $(u_n) \in \mathscr{D}(\Phi)$ sao cho $\lim u_n = u, \lim \Phi u_n = g$ ta có $u \in \mathscr{D}(\Phi)$ và $g = \Phi u$.

v) Đồng cấu module $\Phi : \mathscr{D}(\Phi) \to X$ gọi là liên tục nếu với mỗi dãy $(u_n) \in \mathscr{D}(\Phi)$ sao cho $\lim u_n = u \in \mathscr{D}(\Phi)$ ta có $\lim \Phi u_n = \Phi u$.

**Định nghĩa 1.15** ([22]). Cho $\mathcal{X}$ là một RN module. Khi đó

a) Ánh xạ $\varphi : \mathscr{D}(\varphi) \to \mathcal{X}$ được gọi là một *đồng cấu module* nếu miền xác định $\mathscr{D}(\varphi)$ là một RN module và

$$\varphi(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2) = \xi_1 \varphi(x_1) + \xi_2 \varphi(x_2),\ \forall x_1, x_2 \in \mathscr{D}(\varphi),\ \forall \xi_1, \xi_2 \in L^0(\mathscr{F}, \mathbb{K}).$$

Đồng cấu module $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ gọi là *đồng cấu module trên $\mathcal{X}$*.

b) Đồng cấu module $\varphi : \mathscr{D}(\varphi) \to \mathcal{X}$ được gọi là *bị chặn theo xác suất* nếu $\lim\limits_{t\to\infty} \sup\limits_{x \in \mathcal{B}} \mathbf{P}(\|\varphi x\| > t) = 0$ trong đó $\mathcal{B} = \{x \in \mathcal{X} : \|x\| \leq 1\}$ là quả cầu đơn vị của RN module $\mathscr{D}(\varphi)$.

c) Đồng cấu module $\varphi : \mathscr{D}(\varphi) \to \mathcal{X}$ được gọi là *bị chặn hầu chắc chắn* (hay ngắn gọn là, bị chặn h.c.c) nếu tồn tại một biến ngẫu nhiên $\xi \in L_+^0(\mathscr{F})$ sao cho $\|\varphi x\| \leq \xi \|x\|,\ \ x \in \mathscr{D}(\varphi)$.

d) Đồng cấu module $\varphi : \mathscr{D}(\varphi) \to \mathcal{X}$ được gọi là *đóng* nếu với mỗi dãy $(x_n) \in \mathscr{D}(\varphi)$ ta đều có $\lim x_n = x,\ \lim \varphi x_n = y \Rightarrow y = \varphi x$.

e) Đồng cấu module $\varphi : \mathscr{D}(\varphi) \to \mathcal{X}$ được gọi là *liên tục* nếu vỡi mỗi dãy $(x_n) \in \mathscr{D}(\varphi)$ ta có $\lim x_n = x \in \mathscr{D}(\varphi) \Rightarrow \lim \varphi x_n = \varphi x$.

**Định nghĩa 1.16.** Cho $X$ là không gian Banach xác suất. Khi đó

i) Ánh xạ $A : \mathscr{D}(A) \to X$ gọi là ánh xạ tuyến tính nếu miền xác định $\mathscr{D}(A)$ là một không gian định chuẩn và với $x_1, x_2 \in \mathscr{D}(A), t_1, t_2 \in \mathbb{C}$ ta có:

$$A(t_1 x_1 + t_2 x_2) = t_1 A(x_1) + t_2 A(x_2).$$

ii) Ánh xạ $\Phi : \mathscr{D}(\Phi) \to X$ gọi là ánh xạ tuyến tính mạnh nếu miền xác định $\mathscr{D}(\Phi)$ là không gian xác suất định chuẩn và với $u_1, u_2 \in \mathscr{D}(\Phi), \xi_1, \xi_2 \in L_0(\Omega)$, ta có

$$\Phi(\xi_1 u_1 + \xi_2 u_2) = \xi_1 \Phi(u_1) + \xi_2 \Phi(u_2).$$

iii) Cho $B = \{x \in V : \|x\| \leqslant 1\}$ là hình cầu đơn vị trong không gian định chuẩn $V$. Ánh xạ $A : V \to X$ được gọi là *bị chặn theo xác suất* nếu

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{x\in B} \mathbf{P}\{\|Ax\| > t\} = 0, \tag{1.3}$$

và gọi là bị chặn nếu tồn tại một biến ngẫu nhiên $\xi \in L_0^+(\Omega)$ sao cho

$$\|Ax\| \leqslant \xi\|x\| \quad \forall x \in V. \tag{1.4}$$

iv) Cho $\mathcal{B} = \{u \in \mathcal{V} : \|u\| \leqslant 1\}$ là hình cầu đơn vị trong không gian định chuẩn xác suất $\mathcal{V}$. Ánh xạ tuyến tính mạnh $\Phi : \mathcal{V} \to \mathcal{X}$ được gọi là *bị chặn theo xác suất* nếu

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{u\in \mathcal{B}} \mathbf{P}\{\|\Phi u\| > t\} = 0, \tag{1.5}$$

và gọi là *bị chặn* nếu tồn tại biến ngẫu nhiên $\xi \in L_0^+(\Omega)$ sao cho

$$\|\Phi u\| \leqslant \xi\|u\| \quad \forall u \in \mathcal{V}. \tag{1.6}$$

**Ví dụ 1.3.** Cho $V$ là không gian Banach tách được với cơ sở Schauder $e = (e_n)$ và $X$ là không gian Banach. Cơ sở liên hợp ký hiệu là $e^* = (e_n^*)$. Cho $A : V \to L_0^X(\Omega)$ là toán tử tuyến tính. Ký hiệu: $\mathcal{V} \subset L_0^X(\Omega)$ là tập biến ngẫu nhiên $V$- giá trị $u$ với chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u, e_n^*) A e_n \tag{1.7}$$

hội tụ trong $L_0^X(\Omega)$. Nếu $u \in \mathcal{V}$ khi đó tổng (1.7) là ký hiệu $\Phi u$. Ta dễ dàng chỉ ra $\mathcal{V}$ là một $RN$ module và ánh xạ $\Phi : \mathcal{V} \to L_0^X(\Omega)$ là đồng cấu module. Từ $A : X \to L_0^Y(\Omega)$ là liên tục và $x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n^*) e_n$ khi đó $Ax = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n^*) A e_n$ với $V \subset \mathcal{V}$ và $\Phi$ là đồng cấu module mở rộng của $A$.

**Ví dụ 1.4.** Cho $V, X$ là không gian Banach tách được và $A : V \to L_0^X(\Omega)$ là ánh xạ tuyến tính bị chặn. Theo định nghĩa, có một biến ngẫu nhiên $\xi \in L_0^+(\Omega)$ sao cho

$$\|Ax\| \leqslant \xi\|x\| \quad \forall x \in V. \tag{1.8}$$

Ánh xạ $\Phi : L_0^V(\Omega) \to L_0^X(\Omega)$ là đồng cấu modul bị chặn h.c.c. mở rộng của $A$.

**Định lý 1.6** ([24])**.** *Cho $\mathcal{X}$ là một RN module đầy đủ và $\Phi : \mathscr{D}(\Phi) \to \mathcal{X}$ là một đồng cấu module. Khi đó, các mệnh đề sau là tương đương:*

*i) $\Phi$ là bị chặn hầu chắc chắn.*

*ii) $\Phi$ là bị chặn theo xác suất.*

*iii) $\Phi$ là liên tục.*

### 1.3.2 Tính tích phân của hàm nhận giá trị trong RN modul

**Định nghĩa 1.17.** Cho $\mathcal{X}$ là không gian Banach xác suất và $f : [a; b] \to \mathcal{X}$.

i) Hàm $f$ được gọi là *khả vi* nếu với mỗi $t \in (a, b)$ giới hạn $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(t+h) - f(t)}{h}$ tồn tại trong $\mathcal{X}$ và ta viết $f'(t) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(t+h) - f(t)}{h}$.

ii) Hàm $f$ gọi là *khả tích Riemann* (hay ngắn gọn là *khả tích*) nếu với mỗi phân hoạch $I$ của $[a; b]$ có dạng $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ và với mỗi tập $V = (s_i)$ trong đó $s_i \in [t_{i-1}, t_i]$ thì giới hạn $\lim\limits_{|I|\to 0} S(P, V, f)$ tồn tại trong $\mathcal{X}$. Ở đây

$$S(P, V, f) = \sum_{i=1}^{n} f(s_i)(t_i - t_{i-1}); |I| = \max(t_i - t_{i-1}) = \max \Delta t_i$$

Lúc này ta ký hiệu $u = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

iii) Cho hàm $f$ xác định trên $[a, +\infty)$ và khả tích trên mọi tập đóng $[a, b], a < b < \infty$. Khi đó, nếu trong $\mathcal{X}$ tồn tại giới hạn $\lim_{b\to+\infty} \displaystyle\int_a^b f(t)dt$. thì ta ký hiệu là $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$.

**Bổ đề 1.4.** *Cho $f, g : [a, b] \to \mathcal{X}$ và $\xi, \eta : [a, b] \to L_0(\Omega)$. Khi đó*

*i) Nếu $\lim\limits_{t\to t_0} f(t) = u$ thì $\lim\limits_{t\to t_0} \|f(t)\| = \|u\|$.*

*ii) Nếu $\lim\limits_{t\to t_0} f(t) = u; \lim\limits_{t\to t_0} g(t) = v$ thì $\lim\limits_{t\to t_0}(f(t) + g(t)) = u + v$.*

*iii) Nếu $\lim\limits_{t\to t_0} f(t) = u, \lim\limits_{t\to t_0} \xi(t) = \xi_0$ thì $\lim\limits_{t\to t_0} \xi(t)f(t) = \xi_0 u$.*

*iv) Giả sử*

$$B_n \subset B_{n+1}, \cup_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega.$$

*Nếu với mỗi $n$ ta có $\lim\limits_{k} 1_{B_n} u_k = 1_{B_n} u$ thì $\lim_k u_k = u$.*

*v) Nếu $\xi(t) \leqslant \eta(t), \lim\limits_{t\to t_0} \xi(t) = \xi_0, \lim\limits_{t\to t_0} \eta(t) = \eta_0$ thì $\xi_0 \leqslant \eta_0$.*

**Định lý 1.7.** *Ta có:*

*i) Nếu $f, g$ khả vi và $\xi, \eta \in L_0(\Omega)$ thì $\xi f + \eta g$ cũng khả vi và*

$$(\xi f(t) + \eta g(t))' = \xi f'(t) + \eta g'(t).$$

*ii) Nếu $f, g$ khả tích và $\xi, \eta \in L_0(\Omega)$ thì*

$$\int_a^b (\xi f(t) + \eta g(t))dt = \xi \int_a^b f(t)dt + \eta \int_a^b g(t)dt.$$

**Định lý 1.8** ([32])**.** *Cho $\Phi : \mathscr{D}(\Phi) \to \mathcal{X}$ là một đồng cấu module đóng và $f : [a;b] \to \mathscr{D}(\Phi)$ là hàm khả tích. Nếu ánh xạ $(\Phi f) : t \mapsto \Phi(f(t))$ khả tích thì $\int_a^b f(t)dt \in \mathscr{D}(\Phi)$ và*

$$\int_a^b \Phi f(t)dt = \Phi\left(\int_a^b f(t)dt\right) \tag{1.9}$$

*Đặc biệt, nếu $\Phi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ là một đồng cấu module liên tục thì ta luôn có (1.9).*

**Định lý 1.9.** *Cho $f : [a;b] \to \mathcal{X}$ là liên tục và bị chặn. Khi đó, $f$ khả tích. Trong trường hợp tổng quát, tính liên tục của $f$ không đảm bảo cho sự khả tích của $f$. Ta có*

*i) Nếu $f : [a,b] \to \mathcal{X}$ liên tục và $\xi$-bị chặn thì $\|\int_a^b f(t)dt\| \leqslant \int_a^b \|f(t)\|dt$. Hơn nữa,nếu $\xi \in L_1(\Omega)$ thì $\mathbf{E}\int_a^b \|f(t)\|dt = \int_a^b \mathbf{E}\|f(t)\|dt$.*

*ii) Giả sử $f : [a,\infty] \to \mathcal{X}$ liên tục và bị chặn trên mỗi đoạn $[a,b], a < b < \infty$. Khi đó, nếu $\int_a^\infty \|f(t)\|dt$ tồn tại thì $\int_a^\infty f(t)dt$ cũng tồn tại và*

$$\|\int_a^\infty f(t)dt\| \leqslant \int_a^\infty \|f(t)\|dt.$$

**Định nghĩa 1.18** ([32])**.** Ánh xạ $f : [a,b] \to \mathcal{X}$ được gọi là $L^0$-Lipschitz trên $[a,b]$ nếu tồn tại $\eta \in L^0_+(\mathscr{F})$ sao cho $\|f(t) - f(s)\| \le \eta|t-s|, \quad \forall t,s \in [a,b]$.

**Định lý 1.10** (The fundamental theorem of calculus, [25])**.** *Cho $f : [a,b] \to \mathcal{X}$ là một hàm khả vi liên tục. Giả sử $f$ là $L^0$-Lipschitz trên $[a,b]$. Khi đó $f'$ khả tích và*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(s)ds.$$

**Ví dụ 1.5.** Cho $\Omega = [0;1]$, $P$ là tích phân Lebesgue đo được và $\mathcal{X} = L_0(\Omega)$. Xét hàm $f : [0,1] \to L_0(\Omega)$ xác định $f(t)(\omega) = 1_{[0,t]}(\omega)$. Ta có $f'(t) = 0 \quad \forall t \in [0,1]$. và

$$f(t+h)(\omega) - f(t)(\omega) = 1_{[t,t+h]}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{if } t \leqslant \omega \leqslant t+h \\ 0 & \text{các trườn hợp khác.} \end{cases}$$

Do đó

$$\begin{aligned} P\left(\frac{|f(t+h) - f(t)|}{h} > c\right) &\leqslant P\{f(t+h) - f(t) \neq 0\} \\ &= P\left(\omega : t \leqslant \omega \leqslant t+h\right) \\ &= h. \end{aligned}$$

Suy ra $f'(t) = 0$, suy ra $\int_0^1 f'(s)ds = 0$. Nhưng $f(1) - f(0) = 1 - 0 = 1$.

## Kết luận chương 1

Trong Chương 1, luận án đã giải quyết được các vấn đề sau:

- Trình bày các khái niệm cần thiết, các bổ đề quan trọng để phục vụ các chương sau.
- Đưa ra các định nghĩa về biến ngẫu nhiên, toán tử ngẫu nhiên trên không gian Banach khả ly, các loại hội tụ của toán tử ngẫu nhiên.
- Đưa ra các định nghĩa về kỳ vọng có điều kiện của biến ngẫu nhiên, tích phân ngẫu nhiên của hàm ngẫu nhiên nhậ giá trị trên không gian banach khả ly,định nghĩa về không gian banach xác suất, các ví dụ và so sánh quan trong.

# Chương 2

# Hai vấn đề của giải tích ngẫu nhiên trên không gian Banach

Trong chương này, tôi xin trình bày hai vấn đề của giải tích ngẫu nhiên trên không gian Banach. Trước tiên, ta thiết lập các điều kiện để toán tử ngẫu nhiên, toán tử ngẫu nhiên mở rộng và martingale toán tử ngẫu nhiên bị chặn hội tụ. Hơn nữa chúng tôi định nghĩa tích các toán tử ngẫu nhiên không bị chặn độc lập và sử dụng các kĩ thuật hội tụ của martingale đưa ra điều kiện để tích vô hạn các toán tử ngẫu nhiên không bị chặn độc lập hội tụ. Các kết quả này đã được gửi đăng trong [55] và [56]. Tiếp theo, chúng tôi xây dựng khái niệm "đa tạp quán tính trung bình bình phương", tìm điều kiện đảm bảo cho sự tồn tại của nó đối với một lớp các phương trình vi phân ngẫu nhiên tựa tuyến tính trên một không gian Hilbert thực khả li.

## 2.1 Sự hội tụ của dãy Martingal các toán tử ngẫu nhiên bị chặn

### 2.1.1 Giới thiệu bài toán

Việc nghiên cứu các toán tử ngẫu nhiên không chỉ mang ý nghĩa là sự mở rộng của các toán tử tất định mà còn vì những ứng dụng rộng rãi của nó và được nghiên cứu theo nhiều hướng khác nhau. Chẳng hạn: định lý điểm bất động ngẫu nhiên đối với các toán tử ngẫu nhiên, phương trình vi phân ngẫu nhiên, toán tử tuyến tính ngẫu nhiên (xem [13]-[16]). Trong đó, định lý giới hạn martingale luôn nhận được sự quan tâm đặc biệt của nhiều nhà Toán học và đã có nhiều kết quả được công bố (xem [10], [11],[12],[2] và các tài liệu trích dẫn đi kèm).

### 2.1.2 Sự hội tụ của dãy Martingal

Cho $\{A_n, n \geq 1\}$ là dãy Martingale của các toán tử ngẫu nhiên bị chặn từ $X$ vào $X$. Khi đó tồn tại các ánh xạ $T_n : \Omega \longrightarrow L(X;X)$ sao cho $A_n x(\omega) = T_n(\omega)x$ h.c.c.

**Định lý 2.1.** *Giả sử $X$ có tính chất Radon-Nikodym, cho $p \geq 1$ và $\{A_n, n \geq 1\}$ là dãy Martingale các toán tử ngẫu nhiên bị chặn từ $X$ vào $X$. Khi đó*

*i)* $\|T_n(\omega)\|$ $(n \in \mathbb{N})$ *là các biến ngẫu nhiên nhận giá trị thực.*

*ii) Nếu* $\sup\limits_{n\geq 1} \mathbf{E}\|T_n\| < \infty$ *thì tồn tại một toán tử ngẫu nhiên bị chặn $A$ sao cho dãy $\{A_n, n \geq 1\}$ hội tụ h.c. c. tới $A$. Hơn nữa, $\|T_n\|$ cũng là một dãy hội tụ h.c.c.*

*iii) Nếu* $\sup\limits_{n\geq 1} \mathbf{E}\|T_n\|^p < \infty, \quad p > 1$, *thì tồn tại toán tử ngẫu nhiên bị chặn $A$ sao cho dãy $\{A_n, n \geq 1\}$ hội tụ trong $\mathcal{L}_p$ tới $A$.*

**Định lý 2.2.** *Giả sử $X$ là không gian có tính chất Radon-Nikodym, cho $p \geq 1$, $\{A_n, n \geq 1\}$ là dãy martingale các toán tử ngẫu nhiên bị chặn từ $X$ vào $X$. Khi đó* *i) Nếu* $\sup_{n\geq 1}\mathbf{E}\|T_n\| < \infty$ *thì tồn tại một toán tử ngẫu nhiên bị chặn* $A$ *sao cho dãy* $\{A_n u, n \geq 1\}$ *hội tụ h.c.c tới* $Au$ *với mọi* $u \in L_0^{\mathbb{E}}(\Omega, \mathscr{F}_1)$.

*ii) Nếu* $\sup_{n\geq 1}\mathbf{E}\|T_n\|^p < \infty,\ (p > 1)$, *thì tồn tại một toán tử ngẫu nhiên bị chặn* $A$ *sao cho dãy* $\{A_n u, n \geq 1\}$ *hội tụ h.c.c tới* $Au$ *với mọi* $u \in L_q^{\mathbb{E}}(\Omega, \mathscr{F}_1)$ *mà* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

*iii) Nếu* $\sup_{n\geq 1}\mathbf{E}\|T_n\|^q < \infty,\ (q > 1)$, *thì tồn tại một toán tử ngẫu nhiên bị chặn* $A$ *sao cho dãy* $\{A_n, n \geq 1\}$ *là hội tụ trong* $L_r, (q > r > 1)$ *tới* $Au$ *với mọi* $u \in L_p^{\mathbb{E}}(\Omega, \mathscr{F}_1)$ *mà* $\frac{r}{p} + \frac{r}{q} = 1$.

Với $\{A_n, n \geq 1\}$ là dãy martingale các toán tử ngẫu nhiên từ $X$ vào $X$ ta đặt

$$B_n x = A_n x - A_{n-1}x.$$

Khi đó $\mathbf{E}(B_n x|\mathscr{F}_{n-1}) = 0$ và $B_n x = A_n x - A_{n-1}x = (T_n - T_{n-1})x := T_{B_n}x$. Lúc này, ta nói $\{B_n, n \geq 1\}$ là hiệu martingale các toán tử ngẫu nhiên bị chặn. Hơn nữa, ta xây dựng các dãy $\{A_n^b, n \geq 1\}$ và $\{A_n^f, n \geq 1\}$ như sau:

$$\begin{aligned} A_n^b &= (I + B_n)(I + B_{n-1})...(I + B_1) \\ A_n^f &= (I + B_1)...((I + B_{n-1})(I + B_n) \end{aligned}$$

Tiếp theo, ta xét sự hội tụ của các dãy $\{A_n^b, n \geq 1\}$ và $\{A_n^f, n \geq 1\}$ tức là sự hội tụ của các tích $\prod_{k=\infty}^{1}(I + B_k)$ và $\prod_{k=1}^{\infty}(I + B_k)$.

**Định lý 2.3.** *Giả sử* $X$ *là không gian có tinh chất Radon-Nikodym. Cho* $p \geq 1$ *và* $\{B_n, n \geq 1\}$ *là dãy hiệu martingale các toán tử ngẫu nhiên bị chặn từ* $X$ *vào* $X$. *Khi đó*

*i) Nếu* $\mathbf{E}\prod_{n=1}^{\infty}\|I + T_{B_n}\| < \infty$ *thì các tích* $\prod_{k=\infty}^{1}(I + B_k)$ *và* $\prod_{k=1}^{\infty}(I + B_k)$ *hội tụ h.c.c.*

*ii) Nếu* $\mathbf{E}\prod_{n=1}^{\infty}\|I + T_{B_n}\|^p < \infty$ *thì các tích* $\prod_{k=\infty}^{1}(I + B_k)$ *và* $\prod_{k=1}^{\infty}(I + B_k)$ *hội tụ theo trung bình cấp* $p$.

## 2.2 Đa tạp quán tính trung bình bình phương

### 2.2.1 Giới thiệu bài toán

Trong phần này của luận án chúng tôi xây dựng khái niệm "đa tạp quán tính trung bình bình phương", tìm điều kiện đảm bảo cho sự tồn tại của nó đối với một lớp các phương trình vi phân ngẫu nhiên tựa tuyến tính trên một không gian Hilbert thực khả li có dạng

$$\begin{cases} dx(t) = [-Ax(t) + f(t, x(t))]\,dt + g(t, x(t))dW(t) & t \geq s, \\ x(s) = x_s, \end{cases} \tag{2.1}$$

trong đó $A$ là một toán tử xác định dương, tự liên hợp và có phổ rời rạc (xem Giả thiết 1); $f : \mathbb{R} \times L_2(X_\beta) \to L_2(X)$, $g : \mathbb{R} \times L_2(X_\beta) \to L_2(X)$, $W(t)$ là một chuyển động Brown một chiều thông thường xác định trên không gian xác suất khả lọc $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P}, \mathscr{F}_t)$ vơi

$$\mathscr{F}_t = \sigma\left\{W(u) - W(v); u, v \leq t\right\},$$

và $L_2(X)$ là không gian gồm các biến ngẫu nhiên $X$-giá trị thỏa mãn

$$\mathbf{E}\|x\|^2 = \int\limits_{\Omega} \|x\|^2 d\mathbf{P} < +\infty.$$

Dễ thấy $L_2(X)$ là không gian Banach với chuẩn $\|x\|_2 = \left(\mathbf{E}\|x\|\right)^{1/2}$.

**Giả thiết 1.** *Toán tử $A : X \to X$ là một toán tử tự liên hợp, xác định dương có phổ rời rạc thỏa mãn*

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le ..., \quad \text{mỗi giá trị có bội hữu hạn và } \lim_{k\to\infty} \lambda_k = \infty.$$

*Hơn nữa, giả sử $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ lập thành một cơ sở trực chuẩncủa $X$ bao gồm các hàm riêng tương ứng của $A$ tức là, $Ae_k = \lambda_k e_k$.*

Với $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle e_k$ ta có

$$e^{-tA}x = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t}\langle x, e_k\rangle e_k. \tag{2.2}$$

Ta xây dựng phép chiếu $P_N$ lên không giancơ sở$\{e_k : \ k = 1, 2, ..., N\}$ bởi công thức

$$P_N x = \sum_{k=1}^{N}\langle x, e_k\rangle e_k, \quad \text{for } N \in \mathbb{N}^*. \tag{2.3}$$

Để đơn giản, ta viết $P$ thay cho $P_N$ và ký hiệu $Q = I - P$. Khi đó

$$\begin{aligned}
&\|e^{-tA}P\| \le e^{\lambda_N |t|} \quad \text{với } t \in \mathbb{R} \ ,\\
&\|A^{\beta}e^{-tA}P\| \le \lambda_N^{\beta} e^{\lambda_N|t|}, \quad t \in \mathbb{R},\\
&\|e^{-tA}Q)\| \le e^{-\lambda_{N+1}t}, \quad t \ge 0,\\
&\|A^{\beta}e^{-tA}Q\| \le \left[\left(\frac{\beta}{t}\right)^{\beta} + \lambda_{N+1}^{\beta}\right] e^{-\lambda_{N+1}t}, \quad t > 0.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Hơn nữa, ta định nghĩa hàm Green

$$\mathscr{G}(t,\tau) := \begin{cases} e^{-(t-\tau)A}Q & \text{nếu } t > \tau,\\ -e^{-(t-\tau)A}P & \text{nếu } t \le \tau. \end{cases} \tag{2.5}$$

Dễ thấy $\mathscr{G}(t,\tau)$ là một ánh xạ từ $X$ vào $X_\beta$ và từ các đánh giá (2.4), với $\gamma = \dfrac{\lambda_N + \lambda_{N+1}}{2}$ ta có

$$\|e^{\gamma(t-\tau)}A^{\beta}\mathscr{G}(t,\tau)\| \le \kappa(t,\tau)e^{-\alpha|t-\tau|} \quad \text{với mọi } t \ne \tau, \tag{2.6}$$

trong đó $\alpha = \dfrac{\lambda_{N+1} - \lambda_N}{2}$ và $\kappa(t,\tau) = \begin{cases} \left(\dfrac{\beta}{t-\tau}\right)^{\beta} + \lambda_{N+1}^{\beta} & \text{nếu } t > \tau,\\ \lambda_N^{\beta} & \text{nếu } t \le \tau. \end{cases}$

**Định nghĩa 2.1.** Một quá trình ngẫu nhiên đo được $\mathscr{F}_t$-progressively $\{x(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ đuọc gọi là nghiệm nhẹ của (2.1) nếu nó thỏa mãn phương trình tích phân ngẫu nhiên

$$x(t) = e^{-(t-s)A}x(s) + \int_s^t e^{-(t-\tau)A}f(\tau, x(\tau))d\tau + \int_s^t e^{-(t-\tau)A}g(\tau, x(\tau))dW(\tau) \tag{2.7}$$

với mọi $t \geq s$ và với mỗi $s \in \mathbb{R}$.

**Giả thiết 2.** *Tồn tại các hằng số $L_f, L_g$ sao cho*

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\|f(t,x) - f(t,y)\|^2 &\leq L_f\mathbf{E}\|A^\beta(x-y)\|^2, \quad \forall x, y \in L_2(X_\beta),\\ \mathbf{E}\|g(t,x) - g(t,y)\|^2 &\leq L_g\mathbf{E}\|A^\beta(x-y)\|^2, \quad \forall x, y \in L_2(X_\beta).\end{aligned}$$

### 2.2.2 Sự tồn tại của nghiệm nhẹ

**Bổ đề 2.1.** *Giả sử $0 \leq \beta < \frac{1}{2}$, toán tử $A$ thỏa mãn Giả thiết 1 và $f, g$ thỏa mãn Giả thiết 2. Hơn nữa, giả sử $x(\cdot)$ là một nghiệm nhẹ của (2.7) thỏa mãn $x(t) \in L_2(X_\beta)$ với mọi $t \leq t_0$ và $\sup\limits_{t\leq t_0} e^{-2\gamma(t_0-t)}\mathbf{E}\|A^\beta x(t)\|^2 < +\infty$. Khi đó, với $t \leq t_0$ ta có*

$$x(t) = e^{-(t-t_0)A}p + \int_{-\infty}^{t_0} \mathscr{G}(t,\tau)f(\tau, x(\tau))d\tau + \int_{-\infty}^{t_0} \mathscr{G}(t,\tau)g(\tau, x(\tau))dW(\tau) \quad h.k.n \tag{2.8}$$

*với $p \in L_2(X)$ và $\mathscr{G}(t,\tau)$ là hàm Green xác định bởi (2.5).*

Tiếp theo, với $t_0 \in \mathbb{R}$, ta xét

$$\mathscr{L}^{t_0,-} = \left\{ h \in L^2(\mathbb{P}, X_\beta) : \sup_{t\leq t_0} e^{-2\gamma(t_0-t)}\mathbf{E}\|A^\beta h(t)\|^2 < +\infty \right\}$$

là không gian Banach được trang bị chuẩn $\|h\|_{t_0,-} := \sup\limits_{t\leq t_0} e^{-\gamma(t_0-t)}\left(\mathbf{E}\|A^\beta h(t)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

**Bổ đề 2.2.** *Giả sử $0 \leq \beta < \frac{1}{2}$, toán tử $A$ thỏa mãn Giả thiết 1 và $f, g$ thỏa mãn Giả thiết 2. Hơn nữa, giả sử*

$$K = \frac{L_f^2 + L_g^2}{2\alpha}\left[2(2\alpha\beta)^{2\beta}\Gamma(1-2\beta) + \lambda_{N+1}^{2\beta} + \lambda_N^{2\beta}\right] < \frac{1}{3}. \tag{2.9}$$

*Khi đó, ứng với mỗi quá trình ngẫu nhiên $X$-giá trị $p \in L_2(X)$ có một và chỉ một nghiệm $x(\cdot)$ của (2.7) trên $(-\infty, t_0]$ thuộc khôn gian $\mathscr{L}^{t_0,-}$ sao cho $Px(t_0) = p$ hầu khắp nơi.*

### 2.2.3 Sự tồn tại đa tạp quán tính trung bình bình phương

**Định nghĩa 2.2.** Đa tạp quán tính trung bình bình phương của (2.7) là một họ các mặt $\mathscr{M} = (\mathscr{M}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ thuộc $L_2(X_\beta)$ hầu khắp nơi có dạng

$$\mathscr{M}_t = \{p + \Phi_t p \mid p \in L_2(X) \text{ a.e.}\} \subset L_2(X_\beta)$$

trong đó $\Phi_t : L_2(X) \to L_2(X_\beta)$ là một ánh xạ Lipschitz và các điều kiện sau được thỏa mãn:

(i) Các hằng số Lipschits của $\Phi_t$ là không phụ thuộc $t$, i.e., tức là tồn tại một hằng số $C$ không chứa $t$ sao cho: $\mathbf{E}\|A^\beta(\Phi_t p - \Phi_t q)\|^2 \le C\mathbf{E}\|A^\beta(p-q)\|^2$.

(ii) Tồn tại $\gamma > 0$ sao cho với mỗi $x_0$ là biến ngẫu nhiên thuộc $\mathscr{M}_{t_0}$, tồn tại một và chỉ một nghiệm $x(\cdot)$ của (2.7) trên $(-\infty, t_0]$ thỏa mãn $x(t_0) = x_0$ và

$$\sup_{t\le t_0} e^{-2\gamma(t_0-t)}\mathbf{E}\|A^\beta x(t)\|^2 < +\infty.$$

(iii) $\mathscr{M}$ là bất biến dương theo nghĩa nếu $x$ là nghiệm của (2.7) thỏa mãn $x(s) \in \mathscr{M}_s$, thì ta có $x(t) \in \mathscr{M}_t$ h.k.n với $t \ge s$.

(iv) $\mathscr{M}$ hút cấp mũ các nghiệm của (2.7) theo nghĩa trung bình bình phương, tức là, với nghiệm tùy ý $x$ of (2.7) và $s \in \mathbb{R}$ cố định, tồn tại một hằng số dương $H$ và một nghiệm $x^*$ thuộc $\mathscr{M}$ sao cho

$$\mathbf{E}\|A^\beta[x(t) - x^*(t)]\|^2 \le He^{-2\gamma(t-s)} \quad \text{với} \quad t \ge s. \tag{2.10}$$

**Định lý 2.4.** *Giả sử $0 \le \beta < \frac{1}{2}$, toán tử $A$ thỏa mãn Giả thiết 1 và $f, g$ thỏa mãn Giả thiết 2. Ta đặt*

$$K = \frac{L_f^2 + L_g^2}{2\alpha}\left[2(2\alpha\beta)^{2\beta}\Gamma(1-2\beta) + \lambda_{N+1}^{2\beta} + \lambda_N^{2\beta}\right], \quad \hbar := K\left(1 + \frac{4\lambda_N^{4\beta}(L_f^2 + L_g^2)}{\alpha(1-3K)}\right).$$

*Nếu $K$ và $\hbar$ là các hằng số dương sao cho $\max\{K, \hbar\} < \frac{1}{3}$, thì tồn tại một đa tạp quán tính trung bình bình phương của (2.7).*

### 2.2.4 Ví dụ

Giả sử $W(t)$ là chuyển động Brown một chiều trên không gian xác suất khả lọc $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}, \mathscr{F}_t)$, ta xét phương tình truyền nhiệt ngẫu nhiên

$$\begin{cases} du(t,\xi) = \left[k\dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2}u(t,\xi) + \dfrac{a\sin t}{1+|u(t,\xi)|}\right]dt + be^{-t^2}\ln(1+|u(t,\xi)|)dW(t), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall t > s, 0 < \xi < 1 \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, \quad t \in \mathbb{R} \\ u(s,\xi) = u_s(\xi), \quad 0 \le \xi \le 1, \ s \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.11}$$

trong đó $k > 0$ là hàng số truyền dẫn nhiệt.

## Kết luận chương 2

Trong Chương 2, luận án đã giải quyết được các vấn đề sau:

- Thiết lập các điều kiện để toán tử ngẫu nhiên, toán tử ngẫu nhiên mở rộng và martingale toán tử ngẫu nhiên bị chặn hội tụ.
- Đưa ra định nghĩa tích các toán tử không bị chặn độc lập bằng phương pháp thác triển toán tử ngẫu nhiên và sử dụng các kĩ thuật hội tụ của martingale thiết lập điều kiện để tích vô hạn các toán tử ngẫu nhiên độc lập không bị chăn hội tụ.

- Tìm điều kiện đảm bảo cho sự tồn tại của nó đối với một lớp các phương trình vi phân ngẫu nhiên tựa tuyến tính trên một không gian Hilbert thực khả li có dạng

$$\begin{cases} dx(t) = [-Ax(t) + f(t, x(t))]\, dt + g(t, x(t)) dW(t) \qquad t \geq s, \\ x(s) = x_s, \end{cases}$$

# CHƯƠNG 3

# C-nửa nhóm và bài toán Cauchy trong không gian Banach xác suất

Trong chương này chúng tôi phát biểu khái niệm $C$-nửa nhóm bị chặn mũ của các đồng cấu module liên tục,sau đó nghiên cứu sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm của bài toán Cauchy với phần tuyến tính là toán tử sinh của một $C$-nửa nhóm bị chặn mũ.

## 3.1 C-nửa nhóm các đồng cấu liên tục trên không gian Banach xác suất

### 3.1.1 Giới thiệu bài toán

Như một sự mở rộng của lý thuyết nửa nhóm liên tục mạnh thông thường trên một không gian Banach, lý thuyết $C$-nửa nhóm bị chặn mũ đã được giới thiệu trong [20] và sau đó nhận được sự quan tâm đặc biệt của nhiều nhà Toán học (chẳng hạn [17],[29],[30] và [34] ). Lý thuyết này cho phép ta nghiên cứu một lớp rộng hơn của các phương trình tiến hóa mà ở đó tính đặc chỉnh có thể bị phá vỡ.

### 3.1.2 $C$- nửa nhóm các đồng cấu module liên tục

**Định nghĩa 3.1.** Cho $(\mathbf{S}, \|\cdot\|)$ là một RN module trên $\mathbb{K}$ có cơ sở là $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$. Ta ký hiệu $\mathcal{B}(\mathbf{S})$ là tập hợp gồm các đồng cấu module liên tục từ $\mathbf{S}$ vào $\mathbf{S}$ và $C$ là một toán tử đơn ánh thuộc $\mathcal{B}(\mathbf{S})$. Khi đó, họ $\{W(t) : t \geq 0\}$ in $\mathcal{B}(\mathbf{S})$ được gọi là *$C$-nửa nhóm các đồng cấu module trên* $\mathbf{S}$ ( hay ngắn gọn là: *$C$-nửa nhóm*) nếu

(i) $W(0) = C$;

(ii) $CW(s+t) = W(t)W(s)$ với mọi $t, s \geq 0$;

(iii) Ánh xạ $t \mapsto W(t)x$ từ $[0, \infty)$ vào $\mathbf{S}$ là liên tục với mọi $x \in \mathbf{S}$.

Một $C$-nửa nhóm $\{W(t) : t \geq 0\}$ được gọi là *bị chặn mũ* nếu tồn tại $M \in L_0^+(\Omega), \kappa \in L_0(\Omega, \mathbb{R})$ sao cho $\|W(t)\| \leq Me^{\kappa t}$, với $t \geq 0$.

**Nhận xét 3.1.** a. Nếu $C = I$, toán tử đồng nhất trên $\mathbf{S}$, thì $\{W(t) : t \geq 0\}$ là một nửa nhóm liên tục mạnh gồm các đồng cấu module liên tục được nghiên cứu trong [32].

b. Trong [32], các tác giả chỉ ra rằng một nửa nhóm liên tục mạnh bị chặn gồm các đồng cấu module thì bị chặn mũ. Tuy nhiên, điều này không đúng đối với $C$-nửa nhóm các đồng cấu module. Ví dụ sau chỉ ra rằng có một $C$-nửa nhóm bị chặn mà không bị chặn mũ.

c. Trong $(ii)$ cho $s \to 0^+$ ta được $CW(t) = W(t)C$ với $t \geq 0$. Với mọi $t \geq 0$, ta đặt $T(t)x = C^{-1}W(t)x$ với

$$\mathrm{Dom}(T(t)) = \{x \in \mathbf{S} : W(t)x \in \mathrm{Range}(C)\}.$$

Khi đó $\{W(t) : t \geq 0\}$ là " là một nửa nhóm không bị chặn gồm các đồng cấu module liên tục trên Range$(C^2)$", tức là,

$$T(t+s)x = T(t)T(s)x \text{ với } x \in \mathrm{Range}(C^2),\ t, s \geq 0.$$

**Ví dụ 3.1.** Cho $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ là một không gian xác suất đầy đủ. Ta ký hiệu $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ là không gian các quá trình ngẫu nhiên thực $f = \{f(s, \omega)\}_{s \in \mathbb{R}}$ thỏa mãn

$$\|f\|^2 = \int\limits_{\mathbb{R}} f^2(s, \omega) dt < \infty. \ \ \mathbf{P} - \text{h.c.c.}$$

Ta đồng nhất $f$ và $\overline{f}$ trong $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ nếu $\|f - \overline{f}\| = 0 \ \ \mathbf{P} -$ h.c.c.. Dễ thấy, $\|.\|$ là một $L_0$-chuẩn trên $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ và là một RN module đầy đủ đối với $L_0$-chuẩn này. Giả sử $H$ là một đồng cấu module không bị chặn h.c.c. trên $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ được cho bởi công thức $H(f(s, \omega)) = sf(s, \omega)$ với $f \in \mathcal{M}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Đặt $C = e^{-H^2}$ ta có

$$C(f(s, \omega)) = e^{-s^2} f(s, \omega) \text{ với } f \in \mathcal{M}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

và ta xác định được $C$-nửa nhóm cho bởi công thức

$$W(t) = e^{ZHt} e^{-H^2} \text{ for } t \geq 0.$$

trong đó $Z$ là một biến ngẫu nhiên Gaussian chuẩn tắc. Khi đó $\{W(t) : t \geq 0\}$ là một $C$-nửa nhóm các đồng cấu module. Dễ thấy, với mọi $t \geq 0$, ta có

$$\|W(t)\| = \sup\{e^{Zst - s^2} : s \in \mathbb{R}\} \ = \sup\{e^{-(s - \frac{Z}{2}t)^2 + \frac{Z^2}{4}t^2} : s \in \mathbb{R}\} = e^{\frac{Z^2}{4}t^2}.$$

Lưu ý rằng $Z^2 > 0 \ \ \mathbf{P} -$ h.c.c. và do đó $C$-nửa nhóm các đồng cấu module $\{W(t) : t \geq 0\}$ là bị chặn theo nghĩa của [32] nhưng không bị chặn mũ.

**Định nghĩa 3.2.** Cho $\{W(t) : t \geq 0\}$ là một $C$-nửa nhóm bị chặn mũ trên $\mathbf{S}$. Khi đó, ta xác định toán tử sinh $A$ của $\{W(t) : t \geq 0\}$ cho bởi $Ax := C^{-1} \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{W(t)x - Cx}{t}$. với miền xác định $\mathscr{D}(A) = \left\{x \in \mathbf{S} : \text{ giới hạn trên tồn tại Range} C\right\}$.

**Ví dụ 3.2.** Cho $H$ là một đồng cấu module không bị chặn trên $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ và $\{W(t) : t \geq 0\}$ là $C$-nửa nhóm được xác định như trong Ví dụ 3.1. Khi đó

$$\mathscr{D}(A) = \{f \in \mathcal{M}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) |\ H(f) \text{ thuộc} \mathcal{M}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})\}.$$

Dễ thấy $A = ZH$ là toán tử sinh của $C$-nửa nhóm $\{W(t) : t \geq 0\}$.

**Bổ đề 3.1.** *Cho $\{W(t) : t \geq 0\}$ là một $C$-nửa nhóm có toán tử sinh $A$. Giả sử tồn tại $M \in L_0^+(\Omega)$ sao cho*

$$\|W(t)x\| \leq M\|x\|, \quad \forall t \geq 0,\ \forall x \in \mathbf{S}. \tag{3.1}$$

*Khi đó*

$$\|C^2 W(t)x - C^2 W(s)x\| \leq M^2 \cdot \|CAx\|(t - s), \quad \forall 0 \leq s \leq t,\ \forall x \in \mathscr{D}(A).$$

Ta nói $C$-nửa nhóm $\{W(t): t \geq 0\}$ *bị chặn đều* nếu $\vee_{t\geq 0}\|W(t)\|$ thuộc $L_0^+(\Omega)$, tức là, tồn tại $M \in L_0^+(\Omega)$ sao cho $\|W(t)x\| \leq M\|x\|$, với $t \geq 0$ và $x \in \mathbf{S}$.

**Nhận xét 3.2.** Cho $\{W(t): t \geq 0\}$ là một $C$-nửa nhóm bị chặn đều trên $\mathbf{S}$. Với $x \in \mathscr{D}(A)$ tùy ý, ta đặt $f(t) = C^2W(t)x$. Khi đó, ta có

$$\vee\left\{\left\|\frac{f(t_1) - f(t_2)}{t_1 - t_2}\right\| : t_1 > t_2 \geq 0\right\} \in L_+^0(\Omega).$$

**Định lý 3.1.** *Cho $\{W(t): t \geq 0\}$ là một $C$-nủa nhóm bị chặn mũ trên $\mathbf{S}$ có toán tử sinh là $A$. Khi đó ta có các kết luận sau:*

*1) Với $x \in \mathscr{D}(A)$ và $t \geq 0$, ta có $W(t)x \in \mathscr{D}(A)$ và*

$$\frac{d}{dt}W(t)x = AW(t)x = W(t)Ax.$$

*Đặc biệt, với $x \in \mathscr{D}(A)$ và $t \geq 0$ ta có*

$$W(t)x - Cx = \int_0^t W(s)Axds = \int_0^t AW(s)xds.$$

*2) Với $x \in \mathbf{S}$, $t \geq 0$, ta có*

$$\int_0^t W(s)xds \in \mathscr{D}(A) \text{ and } W(t)x = Cx + A\int_0^t W(s)xds.$$

**Bổ đề 3.2.** *Ta có*

$$\lim_{s\to 0^+}\frac{1}{s}\int_0^s W(t)xdt = Cx, \text{ for } x \in \mathbf{S}, \tag{3.2}$$

**Định lý 3.2.** *Cho $A$ là toán sử sinh của một $C$-nửa nhóm bị chặn mũ $\{W(t): t \geq 0\}$ trên $\mathbf{S}$. Khi đó*

*1) $\mathcal{R}(C) \subseteq \overline{\mathscr{D}(A)}$, trong đó $\mathcal{R}(C)$ là ảnh của $C$.*

*2) $A$ đóng, không cần thiết phải xác định trù mật và thỏa mãn $C^{-1}AC = A$.*

### 3.1.3 Sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy đối với C-nửa nhóm bị chặn mũ

Trong phần này, ta giả sử $\mathbf{S}$ là một RN module đầy đủ, $R_+^1 = [0, +\infty)$, $\mathbf{C}\left(R_+^1; \mathscr{D}(A)\right)$ là tập hợp gồm các hàm liên tục từ $R_+^1$ vào $\mathscr{D}(A)$, và $\mathbf{C}^1\left(R_+^1; \mathbf{S}\right)$ là tập hợp gồm các hàm khả vi liên tục từ $R_+^1$ vào $\mathbf{S}$.

**Định lý 3.3.** *Cho $\{W(t): t \geq 0\}$ là một $C$-nửa nhóm bị chặn mũ gồm các đồng cấu module liên tục trên $\mathbf{S}$ và $(A, \mathscr{D}(A))$ là toán tử sinh của nó. Khi đó, với giả thiết $L^0$-Lipschitz đối với nghiệm, bài toán giá trị ban đầu thuần nhất*

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = Ax(t), \quad \forall t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \in C(\mathscr{D}(A)) \end{cases} \tag{3.3}$$

*có duy nhất nghiệm $x(t) := W(t)C^{-1}x_0$ thuộc vào $\mathbf{C}\left(R_+^1; \mathscr{D}(A)\right) \cap \mathbf{C}^1\left(R_+^1; \mathbf{S}\right)$.*

**Định lý 3.4.** *Cho* $\{W(t) : t \geq 0\}$ *là một* $C$*-nửa nhóm bị chặn mũ gồm các đồng cấu module liên tục trên* $\mathbf{S}$ *và* $(A, \mathscr{D}(A))$ *là toán tử sinh của nó. Giả sử* $f : [0, \infty) \to \mathcal{R}(C)$ *thỏa mãn* $t \mapsto C^{-1}f(t)$ *thuộc* $\mathbf{C}^1(\mathbb{R}^1_+, \mathbf{S})$*. Khi đó, với giả thiết* $L^0$*-Lipschitz đối với nghiệm, bài toán giá trị ban đầu không thuần nhất*

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + f(t), \quad \forall t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \in C(\mathscr{D}(A)) \end{cases} \tag{3.4}$$

*có nghiệm duy nhất* $x(t) = W(t)C^{-1}x_0 + \int\limits_0^t W(t-s)C^{-1}f(s)ds$ *thuộc* $\mathbf{C}\left(R^1_+; \mathscr{D}(A)\right) \cap \mathbf{C}^1\left(R^1_+; \mathbf{S}\right)$.

## Kết luận chương 3

Trong Chương 3, luận án đã giải quyết được các vấn đề sau:

- Thiết lập các khái niệm $C$-nửa nhóm bị chặn mũ của các đồng cấu module liên tục.
- Chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm của bài toán Cauchy với phần tuyến tính là toán tử sinh của một $C$-nửa nhóm bị chặn mũ. Các kết quả của chương này là mở rộng các kết quả của Xia và các cộng sự [33] trong trường hợp phần tuyến tính là toán tử sinh của một $C$-nủa nhóm bị chặn mũ của các đồng cầu modlule liên tục trên một RN module đầy đủ.

**KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ**

## 1 Những kết quả đã đạt được

Luận án nghiên cứu sự hội tụ của dãy toán tử ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Banach. Kết quả chính của luận án là:

- Thiết lập các điều kiện để toán tử ngẫu nhiên, và martingale toán tử ngẫu nhiên bị chặn hội tụ. Đồng thời đưa ra định nghĩa tích các toán tử ngẫu nhiên không bị chặn độc lập là hội tụ.
- Thiết lập các kết quả về điều kiện đảm bảo cho sự tốn tại của đối với một lớp các phương trình vi phân ngẫu nhiên tựa tuyến tính trên một không gian Hilbert thực khả li.
- Thiết lập các khái niệm $C$-nửa nhóm bị chặn mũ của các đồng cấu module liên tục. Từ đó nghiên cứu về sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm của bài toán Cauchy với phần tuyến tính là toán tử sinh của một $C$-nửa nhóm bị chặn mũ.

## 2 Kiến nghị

Trong thời gian tới chúng tôi mong muốn tiếp tục nghiên cứu những vấn đề sau

- Nghiên cứu phổ của các toán tử ngẫu nhiên tổng quát và các ứng dụng.
- Nghiên cứu các định lý giới hạn và áp dụng các định lý giới hạn trong lý thuyết toán tử ngẫu nhiên.

# DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN


1. Tran Manh Cuong, Ta Cong Son, Le Thi Oanh (2018), "Convergence for Martingale Sequences of Random Bounded Linear Operators", *VNU Journal of Science: Mathematics - Physics,* Vol. 34, No. 4, pp. 55-62.
   DOI: https://doi.org/10.25073/2588-1124/vnumap.4305

2. Le Thi Oanh (2022), "Square-mean inertial manifolds for stochastic differential equations", *Random Oper. Stoch. Equ.* 30, no. 2, 149–159. (SCOPUS, Web of Science - Emerging Sources Citation Index)
   DOI: https://doi.org/10.1515/rose-2022-2078

3. Ta Cong Son, Dang Hung Thang, Le Thi Oanh (submitted), "Exponentially Bounded C-semigroup and the Cauchy initial value problems in complete random normed modules".