

Hà Nội, ngày 30 tháng 10 năm 2023

THÔNG TIN VỀ LUẬN ÁN TIẾN SĨ

1. **Họ và tên nghiên cứu sinh:** Nguyễn Đặng Tuyên 2. **Giới tính:** Nam
3. **Ngày sinh:** 25/12/1984.
4. **Nơi sinh:** Văn Cầm, Hưng Hà, Thái Bình.
5. **Quyết định công nhận nghiên cứu sinh:** số 2251 / QĐ-ĐHKHTN ngày 19 / 7 / 2019 của Hiệu trưởng Trường ĐHKHTN.
6. **Các thay đổi trong quá trình đào tạo** (nếu có):
7. **Tên đề tài luận án:** Một vài khía cạnh của toán tử p -Laplace trên các đa tạp Riemann.
8. **Chuyên ngành:** Toán giải tích 9. **Mã số:** 9460101.02
10. **Cán bộ hướng dẫn khoa học:** PGS. TS. Nguyễn Thạc Dũng, PGS. TS. Phạm Đức Thoan.
11. **Tóm tắt các kết quả mới của luận án:**

11.1. Mục đích và đối tượng nghiên cứu của luận án

Mục đích đầu tiên của luận án là khảo sát các tính chất triệt tiêu của không gian các dạng vi phân p -điều hòa với năng lượng L^q hữu hạn. Cụ thể, luận án đưa ra các điều kiện đủ về độ cong của đa tạp Riemann M sao cho các dạng vi phân p -điều hòa với năng lượng L^q hữu hạn trên M là triệt tiêu.

Tiếp theo, luận án nghiên cứu định lý Liouville cho phương trình elliptic trên không gian độ đo metric tron. Cụ thể, luận án đưa ra định lý Liouville cho phương trình sau

$$\Delta_{p,f} v + h(v) = 0$$

trên không gian độ đo metric tron, ở đó $h(v)$ là một hàm khả vi trên \mathbb{R} và thỏa mãn $h'(v) \leq 0$.

Cuối cùng, luận án đưa ra ước lượng gradient cho phương trình p -Laplace có trọng trên đa tạp Riemann. Cụ thể, luận án đưa ra các ước lượng gradient địa phương cho nghiệm dương của phương trình sau

$$\Delta_{p,f}u + F(u) = 0$$

trên không gian độ đo metric trơn không compact, trong đó F là một hàm khả vi trên \mathbb{R} thỏa mãn $F(u) \geq 0$ khi $u \geq 0$. Từ đó, luận án đưa ra các định lí Liouville và các ước lượng gradient địa phương cho một số phương trình đặc biệt.

Đối tượng nghiên cứu của luận án là tính triệt tiêu của các dạng vi phân p -điều hòa trên các đa tạp Riemann, định lí Liouville và ước lượng gradient cho phương trình p -Laplace có trọng.

11.2. Các phương pháp nghiên cứu đã sử dụng

Chúng tôi dùng các phương pháp của giải tích hình học, phương trình đạo hàm riêng, giải tích phức và giải tích hàm để giải quyết các bài toán đặt ra trong luận án. Đặc biệt, chúng tôi sử dụng các bất đẳng thức Sobolev, bất đẳng thức Poincaré và kĩ thuật Bochner để ước lượng một vài đại lượng giải tích liên quan đến các dạng vi phân p -điều hòa. Hơn nữa, một vài kết quả trong hình học vi phân cũng rất hữu dụng trong các khảo sát. Cụ thể, chúng tôi sẽ sử dụng các kĩ thuật sau:

- Sử dụng kĩ thuật Bochner để ước lượng các đạo hàm bậc cao của các hàm p -điều hòa có trọng, các dạng vi phân p -điều hòa có trọng theo các đạo hàm cấp thấp hơn. Sau đó, chúng tôi chuyển các điều kiện hình học liên quan đến độ cong Ricci, Bakry-Émery thành các điều kiện giải tích và đại số để sử dụng công cụ giải tích ước lượng, giải quyết bài toán.
- Sử dụng bất đẳng thức Sobolev, bất đẳng thức Poincaré và các ước lượng độ cong đã biết để nghiên cứu tính chất của các dạng vi phân p -điều hòa.
- Nghiên cứu và chứng minh các ước lượng độ cong mới, sử dụng phương pháp lặp Moser để chứng minh các ước lượng địa phương và toàn cục cho nghiệm dương của phương trình p -Laplace có trọng.

11.3. Các kết quả chính và kết luận

a. Các kết quả chính

- Luận án đã đưa ra được các điều kiện đủ về độ cong của đa tạp Riemann để từ đó thu được tính triệt tiêu các dạng vi phân p -điều hòa. Cụ thể, luận án đưa ra tính triệt tiêu của

các dạng vi phân p -điều hòa trong các trường hợp đa tạp Riemann thỏa mãn bất đẳng thức Poincaré có trọng, đa tạp Riemann với tensor độ cong thuần túy, đa tạp Riemann với bất biến Yamabe dương. Đồng thời, luận án xét tính triệt tiêu của 1-dạng vi phân p -điều hòa trên các đa tạp con thực hoàn toàn trong dạng không gian phức.

- Luận án xét phương trình $\Delta_{p,f}v + h(v) = 0$ trên không gian độ đo metric trơn, ở đó $h(v)$ là một hàm khả vi trên \mathbb{R} và thỏa mãn $h'(v) \leq 0$. Luận án đưa ra một định lý Liouville cho phương trình trên.

- Luận án xét phương trình $\Delta_{p,f}u + F(u) = 0$ trên không gian độ đo metric trơn không compact, trong đó F là một hàm khả vi trên \mathbb{R} thỏa mãn $F(u) \geq 0$ khi $u \geq 0$. Luận án đưa ra một ước lượng gradient cho nghiệm dương của phương trình trên.

b. Kết luận

Luận án nghiên cứu tính triệt tiêu của các dạng vi phân p -điều hòa, định lý Liouville cho phương trình elliptic và ước lượng gradient cho phương trình p -Laplace có trọng trên đa tạp Riemann. Luận án đã đạt được một số kết quả sau:

- Đưa ra và chứng minh một số định lý về tính triệt tiêu của các dạng vi phân p -điều hòa trên đa tạp Riemann, trong đó các kết quả chính là các Định lý 1.1.2, Định lý 1.1.4, Định lý 1.1.6, Định lý 1.1.11, Định lý 1.2.2, Định lý 1.2.3, Định lý 1.2.5.

- Đưa ra và chứng minh một định lý Liouville, cùng các hệ quả của nó, cho phương trình elliptic trên đa tạp Riemann, trong đó kết quả chính là Định lý 1.3.2.

- Đưa ra và chứng minh một số định lý về ước lượng gradient cho phương trình p -Laplace có trọng trên đa tạp Riemann, trong đó kết quả chính là Định lý 1.4.2.

12. Các hướng nghiên cứu tiếp theo:

- Tiếp tục tìm cách đưa ra các điều kiện đủ trên đa tạp Riemann để các dạng vi phân p -điều hòa là triệt tiêu.

- Tiếp tục nghiên cứu định lý Liouville cho một số phương trình đặc biệt trên đa tạp Riemann.

- Tiếp tục nghiên cứu các ước lượng gradient cho một số phương trình p -Laplace, phương trình nhiệt trên đa tạp Riemann.

13. Các công trình công bố liên quan đến luận án:

[1] N. T. Dung, P. D. Thoan and N. D. Tuyen (2021), "Liouville theorems for nonlinear

elliptic equations on Riemannian manifolds", *J. Math. Anal. Appl.* **496**, 124803.

[2] L. V. Dai, N. T. Dung, N. D. Tuyen and L. Zhao (2022), "Gradient estimates for weighted p -Laplacian equations on Riemannian manifolds with a Sobolev inequality and integral Ricci bounds", *Kodai Math. J.* **45**, 19–37.

[3] N. D. Tuyen (2022), "Vanishing theorems for p -harmonic forms on Riemannian manifolds", *Differ. Geom. Appl.* **82**, 101868.

[4] N. T. Dung and N. D. Tuyen (2023), " p -harmonic 1-forms on totally real submanifolds in complex space forms", *Complex Var. Elliptic Equ.* **68**(10), 1812–1832.

T/M TẬP THỂ HƯỚNG DẪN

NGHIÊN CỨU SINH

INFORMATION ON DOCTORAL THESIS

1. **Full name:** Nguyen Dang Tuyen.
2. **Sex:** Male
3. **Date of birth:** 25/12/1984
4. **Place of birth:** Van Cam, Hung Ha, Thai Binh.
5. **Amission decision** number 2251 / QĐ-ĐHKHTN dated 19 / 7 / 2019 by the Rector of VNU Hanoi University of Science.
6. **Changes in academic process**
7. **Official thesis title:** Some aspects of the p -Laplacian on Riemannian manifolds.
8. **Major:** Mathematical Analysis
9. **Code:** 9460101.02
10. **Supervisors:** Assoc. Prof. Dr. Nguyen Thac Dung, Assoc. Prof. Dr. Pham Duc Thoan.

11. Summary of the new findings of the thesis

11.1. Thesis purpose and objectives

The first purpose of this thesis is to consider vanishing properties of space of L^q -energy p -harmonic forms. In details, the thesis gives sufficient conditions on curvatures of a Riemannian manifold M such that L^q -energy p -harmonic forms on M are vanishing.

Next, the thesis studies Liouville theorem for elliptic equations on smooth metric measure spaces. More specific, the thesis gives a Liouville theorem for the following equation

$$\Delta_{p,f} v + h(v) = 0$$

on smooth metric measure space, where $h(v)$ is a differential function on \mathbb{R} satisfying $h'(v) \leq 0$.

Finally, the thesis gives a gradient estimate for weighted p -Laplacian equations on Riemannian manifolds. More specific, the thesis gives locally gradient estimates for positive solutions to the following equation

$$\Delta_{p,f} u + F(u) = 0$$

on non-compact smooth metric measure space, where F is a differential function on \mathbb{R} satisfying $F(u) \geq 0$ for $u \geq 0$. Consequently, the thesis obtains Liouville theorems and locally gradient estimates for some special equations.

Objectives of the thesis are vanishing property of p -harmonic forms on Riemannian manifolds, Liouville theorem and gradient estimate for weighted p -Laplacian equations.

11.2. Research methods

We use methods of geometric analysis, partial differential equation, complex analysis and functional analysis to solve the problems in the thesis. In particular, we use the Sobolev inequality, Poincaré inequality and Bochner technique to estimate some analytical terms concerning p -harmonic forms. Moreover, some results in differential geometry are very useful in this investigation. In details, we use the following technique:

- We use Bochner technique to estimate the high order derivatives of weighted p -harmonic functions, weighted p -harmonic forms into the lower order derivative. Then, we change geometric conditions concerning Ricci curvature, Bakry-Émery curvature to analytical conditions and algebraic conditions to use the analytical tools to estimate and solve the problem.

- We use the Sobolev inequality, the Poincaré inequality and the known curvature estimates to study properties of p -harmonic forms.

- We study and prove new curvature estimates, using the Moser iteration to prove locally estimates and globally estimate for positive solutions to weighted p -Laplacian equations.

11.3. Major results and conclusions

a. The major results

- The thesis gives some sufficient conditions on curvatures of Riemannian manifolds to obtain vanishing property of p -harmonic forms. In details, the thesis gives the vanishing properties of p -harmonic forms in cases of the Riemannian manifold satisfies a weighted Poincaré inequality, the Riemannian manifold has pure curvature tensor, the Riemannian manifold satisfies positive Yamabe invariant. Besides, the

thesis considers the vanishing property of p -harmonic 1-forms on totally real submanifolds in complex space forms.

- The thesis considers equation $\Delta_{p,f}v + h(v) = 0$ on smooth metric measure spaces, where $h(v)$ is a differential function on \mathbb{R} and satisfies $h'(v) \leq 0$. The thesis gives a Liouville theorem for the above equation.

- The thesis considers equation $\Delta_{p,f}u + F(u) = 0$ on smooth metric measure spaces, where F is a differential function on \mathbb{R} and satisfies $F(u) \geq 0$ for $u \geq 0$. The thesis gives a gradient estimate for positive solutions to this equation.

b. Conclusions

The thesis studies the vanishing property of p -harmonic forms, Liouville theorem for elliptic equations and gradient estimate for weighted p -Laplacian equations on Riemannian manifolds. The thesis obtains the following results:

- The thesis gives and proves some theorems about vanishing property of p -harmonic forms on Riemannian manifolds, where main results are Theorem 1.1.2, Theorem 1.1.4, Theorem 1.1.6, Theorem 1.1.11, Theorem 1.2.2, Theorem 1.2.3, Theorem 1.2.5.

- The thesis gives and proves a Liouville theorem, and its corollaries, for elliptic equations on Riemannian manifolds, where main result is Theorem 1.3.2.

- The thesis gives and proves some theorems about gradient estimate for weighted p -Laplacian equations on Riemannian manifolds, where main result is Theorem 1.4.2.

12. Further research directions

- We continue to find sufficient conditions on Riemannian manifolds such that p -harmonic forms are vanishing.

- We continue to study Liouville theorem for some special equations on Riemannian manifolds.

- We continue to study gradient estimates for some p -Laplacian equations, heat equations on Riemannian manifolds.

13. Thesis-related publications

[1] N. T. Dung, P. D. Thoan and N. D. Tuyen (2021), "Liouville theorems for nonlinear elliptic equations on Riemannian manifolds", *J. Math. Anal. Appl.* 496, 124803.

[2] L. V. Dai, N. T. Dung, N. D. Tuyen and L. Zhao (2022), "Gradient estimates for weighted p -Laplacian equations on Riemannian manifolds with a Sobolev inequality and integral Ricci bounds", *Kodai Math. J.* 45, 19–37.

[3] N. D. Tuyen (2022), "Vanishing theorems for p -harmonic forms on Riemannian manifolds", *Differ. Geom. Appl.* 82, 101868.

[4] N. T. Dung and N. D. Tuyen (2023), " p -harmonic 1-forms on totally real submanifolds in complex space forms", *Complex Var. Elliptic Equ.* 68(10), 1812–1832.

Date:

Signature:

Full name: