ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

Hồ Phi Tứ

CÁC PHƯƠNG PHÁP CHIẾU MỞ RỘNG GIẢI MỘT SỐ LỚP BÀI TOÁN CÂN BẰNG HAI CẤP

Chuyên ngành: Toán ứng dụng

Mã số: 9460112.01

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - 2023

Công trình được hoàn thành tại: Khoa Toán Cơ Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội

Tập thể hướng dẫn khoa học:

1. PGS. TS. Phạm Ngọc Anh
2. TS. Vũ Tiến Dũng

Phản biện : …………………………………………………………..

Phản biện : …………………………………………………………..

Phản biện : …………………………………………………………..

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng đánh giá luận án tiến sĩ họp tại Trường Đại học Khoa học Tự nhiên - ĐHQGHN

vào hồi ……. giờ ……. ngày ……. tháng …….. năm 2023

Có thể tìm hiểu luận án tại:

- Thư viện Quốc gia Việt Nam;
- Trung tâm Thư viện và Tri thức số, Đại học Quốc gia Hà Nội.

MỞ ĐẦU

1. Lịch sử vấn đề và lý do chọn đề tài

Cân bằng là một trạng thái mà vạn vật trong tự nhiên luôn hướng tới, bởi lẽ khi đạt được trạng thái cân bằng thì mọi sự vật sẽ có được sự tồn tại lâu dài và bền vững nhất. Trong vật lý, một hệ các vật có được trạng thái cân bằng khi hợp lực tác dụng lên chúng bị triệt tiêu. Trong sinh học, trạng thái cân bằng của một hệ sinh thái đạt được khi lượng thú săn mồi và lượng thú mồi có tỷ lệ tương đồng nhau. Trong kinh tế, một thị trường mua bán đạt trạng thái cân bằng khi lượng cung bằng lượng cầu. Ngoài ra thuật ngữ cân bằng còn được sử dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau như hóa học, sinh học, kỹ thuật, v.v...

Trong toán học, mô hình cân bằng được xem là một sự phát triển tiếp theo của bài toán bất đẳng thức biến phân và lý thuyết tối ưu với nhiều chủ thể tham gia. Trong đó, mỗi chủ thể có những mục tiêu khác nhau thậm chí là đối lập nhau. Do đó, để tìm một phương án tối ưu cho tất cả các chủ thể là điều không thể. Trong tình huống này một khái niệm cân bằng, đặc biệt là khái niệm điểm cân bằng Nash, dễ được chấp nhận hơn. Do vậy, mô hình cân bằng rất hữu ích trong việc phân tích kết quả các tình huống cạnh tranh, việc giải các mô hình cân bằng có thể giúp chúng ta tìm ra giải pháp giải quyết các mâu thuẫn về quyền lợi của các chủ thể tham gia.

Mô hình bài toán cân bằng, viết tắt, $EP(C, f)$ có dạng:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } f(x^*, y) \geq 0, \quad \forall y \in C,$$

ở đây, C là một tập con lồi đóng khác rỗng của không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$, f là một song hàm từ $C \times C$ vào $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện cân bằng $f(x, x) = 0$, với mọi $x \in C$.

Bài toán $EP(C, f)$ được giới thiệu đầu tiên bởi H. Nikaido và K. Isoda vào năm 1955 trong bài báo: "*Note on non-cooperative convex game*". Tới năm 1972, nó tiếp tục được Ky Fan nghiên cứu dưới tên gọi bất đẳng thức Ky Fan. Tuy nhiên hơn 20 năm sau, khi các kết quả nghiên cứu của L.D. Mưu, W. Oettli được công bố vào năm 1992 và E. Blum, W. Oettli được công bố vào năm 1994, thì bài toán này mới thực sự thu hút được sự chú ý của nhiều nhà nghiên cứu. Trong bài báo của mình, các tác giả L.D. Mưu, W. Oettli cũng đã chỉ ra rằng bài toán $EP(C, f)$ chính là một mô hình tổng quát cho nhiều lớp bài toán quan trọng như bài toán tối ưu $OP(C, h)$, bài toán bù, bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị $MVI(C, F)$, bài toán tối ưu véc tơ, bài toán điểm yên ngựa, bài toán cân bằng Nash trong trò chơi không hợp tác, ... Do vậy, bài toán cân bằng $EP(C, f)$ không những có ý nghĩa về mặt lý thuyết mà nó còn mang nhiều ý nghĩa trong ứng dụng. Một ứng dụng nổi bật và tạo được tiếng vang lớn là cân bằng kinh tế Nash-Cournot được nhà toán học J.F. Nash đưa ra dưới dạng mở rộng của mô hình trò chơi bất hợp tác. Kết quả nghiên cứu này được trao giải Nobel về kinh tế năm 1994.

Ngày nay, bài toán cân bằng $EP(C, f)$ đã được tổng quát hóa và phát triển theo nhiều hướng như bài toán cân bằng véc tơ, cân bằng đa trị, bài toán cân bằng trên tập nghiệm của bài toán tối ưu, tìm điểm chung của bài toán cân bằng và bài toán điểm bất động, bài toán cân bằng trên tập nghiệm bài toán bất đẳng thức biến phân, bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập nghiệm bài toán cân bằng. Đặc biệt, thời gian gần đây bài toán cân bằng hai cấp $BEP(C, g, f)$ nhận được sự quan tâm của nhiều nhà nghiên cứu như của các nhóm tác giả P.K. Anh và cộng sự; P.N. Anh và cộng sự; G.C. Bento..., bởi tính mới trong lý thuyết và các ứng dụng trong thực tiễn. Thực tế chỉ ra rằng, mỗi sản phẩm trong thị trường được sản xuất bởi nhiều công ty khác nhau trong cả nước. Mỗi điểm cân bằng Nash là một phương án tối ưu nhất để lợi nhuận các công ty được cao nhất. Tuy nhiên, nhà nước cần một hàm cân bằng kinh tế vĩ mô để điều tiết nền kinh tế của cả nước. Như vậy, một mô hình cân bằng trên tập các điểm cân bằng (điểm cân bằng Nash) là một ứng dụng quản lý kinh tế thực tiễn của bài toán cung-cầu trong nền kinh tế thị trường. Mô hình bài toán cân bằng hai cấp $BEP(C, g, f)$ được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } \bar{x} \in Sol(C, g) \text{ sao cho } f(\bar{x}, y) \geq 0, \ \forall y \in Sol(C, g),$$

trong đó, f và g là các song hàm từ $C \times C$ vào $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện cân bằng $f(x, x) = g(x, x) = 0$, với mọi $x \in C$, $Sol(C, g)$ là tập nghiệm của bài toán cân bằng sau

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } g(x^*, y) \geq 0, \ \forall y \in C.$$

Như vậy $BEP(C, g, f)$ là một bài toán cân bằng với tập ràng buộc là tập nghiệm của một bài toán cân bằng khác và cũng là một dạng của bài toán hai cấp. Bài toán này được đề cập đến lần đầu tiên bởi O. Chadli và các cộng sự vào năm 2000. Bài toán $BEP(C, g, f)$ được xem là tổng quát hóa của nhiều lớp bài toán hai cấp trước đó như bài toán tối ưu hai cấp, bài toán bất đẳng thức biến phân hai cấp, bài toán cân bằng trên tập bất động, bài toán cân bằng trên bất đẳng thức biến phân, ... Một số trường hợp đặc biệt của bài toán cân bằng hai cấp có thể áp dụng cho các mô hình thực tế. Chẳng hạn, bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của ánh xạ không giãn được áp dụng cho bài toán điều khiển công suất của mạng CDMA, được giới thiệu bởi H. Iiduka (2012), bài toán xử lý tín hiệu.

Bài toán cân bằng hai cấp có hai hướng nghiên cứu chính. Hướng thứ nhất, nghiên cứu về sự tồn tại và tính chất của tập nghiệm chẳng hạn trong nghiên cứu của X.P. Ding. Hướng thứ hai, nghiên cứu đề xuất các thuật toán giải và tính toán trên máy tính như trong nghiên cứu của Z. Chbani, H. Riahi (2015), P.N. Anh (2019), G. Li (2022)... Hiện nay, nghiên cứu các thuật giải hữu hiệu giải bài toán cân bằng hai cấp rất được quan tâm, tuy nhiên một vấn đề khó của bài toán cân bằng hai cấp là tập ràng buộc không được cho dưới dạng hiển. Do vậy, các thuật toán giải bài toán tối ưu, bài toán bất đẳng thức biến phân và bài toán cân bằng thường không được áp dụng một cách trực tiếp cho bài toán cân bằng hai cấp. Chúng tôi điểm lại một số thuật toán hữu hiệu để giải bài toán cân bằng hai cấp. Thuật toán điểm gần kề được đề xuất đầu tiên bởi B. Martinet giải bài toán bất đẳng thức biến phân và được nghiên cứu mở rộng cho bài toán tìm không điểm của ánh xạ đơn điệu cực đại bởi R.T. Rockafeller. Các hướng nghiên cứu này cũng được mở rộng bởi A. Moudafi và I.V. Konnov giải bài toán cân bằng. Năm 2010, A. Moudafi tiếp tục mở rộng để giải bài toán cân bằng hai cấp $BEP(C, g, f)$. Thuật toán được viết chi tiết như sau:

$$\begin{cases} x^0 \in C,\ k = 0 \\ \text{Tìm } x^{k+1} \in C \text{ sao cho:} \\ f(x^{k+1}, y) + \epsilon_k g(x^{k+1}, y) + \frac{1}{r_k}\langle x^{k+1} - x^k, y - x^{k+1}\rangle \geq 0,\ \forall y \in C. \end{cases} \tag{1}$$

trong đó $\{\epsilon_k\}$ và $\{r_k\}$ là các dãy số thực dương. Thuật toán (1) được viết dưới dạng rất đơn giản, tuy nhiên có hai vấn đề khó phát sinh trong thuật toán (1). Vấn đề thứ nhất, tại mỗi bước lặp k, thuật toán cần giải chính xác nghiệm của bài toán cân bằng phụ. Vấn đề thứ hai là sự hội tụ của thuật toán cần đòi hỏi giả thiết $\|x^{k+1} - x^k\| < o(\epsilon_k)$. Khi đó, tác giả chỉ ra rằng dãy lặp x^k hội tụ yếu tới một nghiệm của bài toán cân bằng hai cấp trong không gian Hilbert thực. Một tiếp cận khác, nguyên lý bài toán phụ được G. Cohen giới thiệu đầu tiên cho bài toán tối ưu và mở rộng cho bài toán bất đẳng thức biến phân. Năm 2000, trong nghiên cứu của mình, G. Mastroeni đã mở rộng nguyên lý bài toán phụ cho bài toán cân bằng $EP(C, f)$. Thuật toán có dạng

$$\begin{cases} x^0 \in C,\ k = 0 \\ x^{k+1} = \text{argmin}\{\lambda f(x^k, y) + \frac{1}{2}\|y - x^k\|^2 : y \in C\}. \end{cases} \tag{2}$$

Dãy lặp $\{x^k\}$ trong thuật toán (2) hội tụ dưới giả thiết song hàm f đơn điệu mạnh và liên tục kiểu Lipschitz. Thực tế giả thiết đơn điệu mạnh là rất chặt. Để khắc phục điều này, T.Đ. Quốc và các cộng sự đề xuất thuật toán đạo hàm tăng cường

$$\begin{cases} x^0 \in C,\ k = 0 \\ y^k = \text{argmin}\{\lambda f(x^k, y) + \frac{1}{2}\|y - x^k\|^2 : y \in C\} \\ x^{k+1} = \text{argmin}\{\lambda f(y^k, y) + \frac{1}{2}\|y - x^k\|^2 : y \in C\}. \end{cases} \tag{3}$$

Dãy lặp $\{x^k\}$ xác định bởi (3) hội tụ trong không gian hữu hạn chiều dưới giả thiết song hàm f giả đơn điệu và liên tục kiểu Lipschitz. Thuật toán đạo hàm tăng cường được tiếp tục mở rộng trong một số kết quả gần đây như trong nghiên cứu của Y. Liu, H. Kong (2019), T.D. Quoc, P.N. Anh, L.D. Muu (2012),... Chúng tôi nghiên cứu thuật toán đạo hàm tăng cường mở rộng cho bài toán cân bằng hai cấp và đạt được kết quả trong chương 3 của luận án. Tiếp cận thứ 3, phương pháp chiếu dưới đạo hàm được sử dụng cho bài toán bất đẳng thức biến phân hai cấp đầu tiên bởi P.E. Maingé.

Năm 2011, P. Santos và cộng sự đã áp dụng thuật toán chiếu dưới đạo hàm xấp xỉ giải bài toán cân bằng $EP(C, f)$. Dãy lặp của thuật toán được viết dưới dạng

$$\begin{cases} x^0 \in C, \ k = 0 \\ g^k \in \partial_2^{\epsilon_k} f(x^k, x^k), \ \alpha_k = \frac{\beta_k}{\gamma_k}, \ \gamma_k = \max\{\rho_k, \|g^k\|\} \\ x^{k+1} = Pr_C^{\xi_k}(x^k - \alpha_k g^k). \end{cases} \tag{4}$$

Ưu điểm của thuật toán chiếu dưới đạo hàm xấp xỉ (4) là thuật toán chỉ tính một phép chiếu và tính toán dưới đạo hàm xấp xỉ tại mỗi bước lặp.

Các vấn đề lớn được đặt ra khi nghiên cứu các thuật toán giải bài toán cân bằng hai cấp ở đây là:
- *Vấn đề thứ nhất*, tìm nghiệm chính xác của các bài toán phụ trong các thuật toán lặp đã có. Điều này không phải dễ trong các trường hợp bài toán phụ là các bài toán cân bằng hoặc các bài toán bất đẳng thức biến phân;
- *Vấn đề thứ 2*, sự hội tụ của các dãy lặp trong các thuật toán giải bài toán cân bằng hai cấp đòi hỏi giả thiết khá mạnh trên các song hàm như giả thiết đơn điệu mạnh và liên tục kiểu Lipschitz;
- *Vấn đề thứ 3*, bài toán cân bằng hai cấp là một dạng bài toán cân bằng với miền ràng buộc là tập nghiệm của một bài toán cân bằng khác. Khi ánh xạ giá của miền ràng buộc là ánh xạ giả đơn điệu, tập nghiệm ràng buộc là một tập lồi. Tuy nhiên, tập nghiệm ràng buộc không được cho dưới dạng hiện. Hơn nữa, bản thân bài toán cân bằng hai cấp là một bài toán rất tổng quát trong Lý thuyết tối ưu. Chính vì vậy, bài toán cân bằng hai cấp là một bài toán hai cấp khó giải và thuật toán giải bài toán cân bằng hai cấp được nghiên cứu khá hạn chế so với các mô hình toán học khác;
- *Vấn đề thứ 4*, như ta đã biết, phương pháp chiếu là một công cụ rất phổ biến trong việc giải bài toán bất đẳng thức biến phân nói chung và bài toán cân bằng nói riêng. Việc áp dụng phương pháp này cho bài toán cân bằng hai cấp vẫn là một hướng nghiên cứu mở và có ý nghĩa tính toán trên máy tính với rất nhiều mô hình thực tế.

Với các lý do trên, đề tài luận án "Các phương pháp chiếu mở rộng giải một số lớp bài toán cân bằng hai cấp" là một đề tài có tính thời sự cao và có ý nghĩa trong Lý thuyết tối ưu nói riêng và chuyên ngành Giải tích nói chung. Trong luận án này, chúng tôi đã nghiên cứu mở rộng thuật toán chiếu dưới đạo hàm xấp xỉ giải bài toán cân bằng hai cấp. Thuật toán và phân tích sự hội tụ của nó được chúng tôi trình bày chi tiết trong chương 2 và chương 3. Một tiếp cận thứ 4 là tiếp cận DC giải bài toán cân bằng trên tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân affine được chúng tôi nghiên cứu và đề xuất một thuật toán nguyên lý bài toán phụ DC dạng hiển mới. Tại mỗi bước lặp chúng tôi chỉ đòi hỏi giải một bài toán lồi mạnh và một bài toán quy hoạch toàn phương. Thuật toán được tính toán một cách hữu hiệu với các ví dụ số thực hiện trên phần mềm MATLAB.

2. Mục tiêu nghiên cứu

Mục tiêu của luận án là nghiên cứu đề xuất các thuật toán mới giải một số lớp bài toán cân bằng hai cấp. Cụ thể như sau:

- Nghiên cứu đề xuất thuật toán chiếu dưới đạo hàm và thuật toán chiếu tổng quát kết hợp với kỹ thuật quán tính cho bài toán cân bằng hai cấp đơn điệu.
- Nghiên cứu mở rộng thuật toán đạo hàm tăng cường cho bài toán cân bằng trên tập nghiệm của bài toán cân bằng hỗn hợp.
- Kết hợp phương pháp chiếu tổng quát và kỹ thuật phân tích DC, đề xuất thuật toán mới giải bài toán cân bằng trên tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân affine.
- Triển khai các tính toán số minh họa cho các thuật toán đề xuất, so sánh với các thuật toán đã có và ứng dụng cho mô hình cân bằng kinh tế Nash-Cournot.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu: Đối tượng nghiên cứu của luận án là lớp các bài toán cân bằng hai cấp trong không gian Hilbert thực. Cụ thể: Bài toán cân bằng với ràng buộc là tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân, bài toán cân bằng với ràng buộc là tập nghiệm của bài toán cân bằng khác, bài toán cân bằng với ràng buộc là tập điểm bất động giao với tập nghiệm của bài toán cân bằng khác. Một số mô hình thực tế.

Phạm vi nghiên cứu: Luận án tập trung nghiên cứu đề xuất thuật toán mới, cải tiến phương pháp xấp xỉ nghiệm cho bài toán cân bằng hai cấp với trọng tâm là mở rộng phương pháp chiếu, phương pháp đạo hàm tăng cường, phương pháp phân tích DC, ... Chứng minh sự hội tụ của thuật toán, phân tích sai số tính toán trong một số trường hợp cụ thể.

4. Phương pháp nghiên cứu

Để đề xuất thuật toán mới và chứng minh sự hội tụ của dãy lặp giải bài toán cân bằng hai cấp, ngoài việc sử dụng các kỹ thuật cơ bản trong giải tích, giải tích lồi, giải tích đa trị và giải tích phi tuyến, chúng tôi dựa trên các phương pháp đã được sử dụng trong bài toán tối ưu, bài toán bất đẳng thức biến phân như phương pháp chiếu dưới đạo hàm, nguyên lý bài toán phụ, phương pháp đạo hàm tăng cường, phương pháp điểm gần kề,...

5. Kết quả của luận án

Một số kết quả mới đã đạt được của luận án như sau:

- Đề xuất hai thuật toán kiểu chiếu mới và chứng minh sự hội tụ của nó. Thuật toán thứ nhất giải bài toán đơn điệu mạnh với ràng buộc cân bằng đơn điệu. Thuật toán thứ hai sử dụng kỹ thuật chiếu tổng quát và kỹ thuật quán tính giải bài toán cân bằng trên tập điểm bất động giao với tập nghiệm của bài toán cân bằng khác.
- Đề xuất thuật toán đạo hàm tăng cường giải bài toán cân bằng trên tập nghiệm của bài toán cân bằng hỗn hợp và chứng minh sự hội tụ của thuật toán.
- Sử dụng kỹ thuật phân tích DC và phương pháp chiếu tổng quát, đề xuất thuật toán mới giải bài toán cân bằng trên tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân affine.
- Thực hiện các tính toán số minh họa cho các thuật toán đã đề xuất, so sánh với các thuật toán khác, áp dụng cho mô hình cân bằng kinh tế Nash-Cournot.

6. Bố cục của luận án

Ngoài phần mở đầu, danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án, danh mục tài liệu tham khảo và kết luận, luận án được trình bày trong 4 chương:

Chương 1. Bài toán cân bằng hai cấp

Chương 2. Phương pháp chiếu dưới đạo hàm

Chương 3. Phương pháp đạo hàm tăng cường

Chương 4. Nguyên lý bài toán phụ DC

Chương 1

BÀI TOÁN CÂN BẰNG HAI CẤP

Mục đích của chương này là chúng tôi nhắc lại một số khái niệm cũng như những kết quả đã biết trong giải tích hàm, đặc biệt là giải tích lồi, là kiến thức cơ sở cho các chương sau. Bên cạnh đó, khái niệm về bài toán cân bằng hai cấp, các bài toán liên quan, điều kiện tồn tại nghiệm và một số phương pháp giải thường gặp cho bài toán bài toán cân bằng hai cấp như phương pháp điểm gần kề, phương pháp sử dụng nguyên lý bài toán phụ, phương pháp chiếu cũng được chúng tôi trình bày trong chương này. Nội dung của chương 1 được viết tham khảo một số kết quả trong H.H. Bauschke, P.L. Combettes (2011), J. Peypouquet (2015), R.T. Rockafellar (1970).

- **Mục 1.1** Trình bày một số khái niệm và một vài kết quả cơ bản được dùng cho các chương sau.

- **Mục 1.2** Định nghĩa bài toán cân bằng hai cấp. Đề cập một số bài toán liên quan, sự tồn tại nghiệm và một số thuật giải thường gặp cho bài toán cân bằng hai cấp.

Chương 2

PHƯƠNG PHÁP CHIẾU DƯỚI ĐẠO HÀM

Nội dung của chương này được viết dựa trên hai bài báo [CT1] và [CT4] trong Danh mục công trình khoa học của tác giả có liên quan đến luận án.

2.1 Thuật toán chiếu dưới đạo hàm xấp xỉ

Năm 2011, P. Santos và cộng sự đã đề xuất phương pháp chiếu dưới đạo hàm xấp xỉ (kết hợp của dưới đạo hàm xấp xỉ và phương pháp chiếu) cho bài toán $EP(C, f)$, trong đó tại mỗi bước lặp chúng ta chỉ cần tính dưới vi phân xấp xỉ của một hàm lồi và thực hiện một phép chiếu lên tập lồi C. Trong khi đối với các phương pháp khác, tại mỗi bước lặp chúng ta thường phải giải một hoặc một số bài toán phụ dẫn đến chi phí tính toán lớn hơn. Từ những ưu điểm trên, trong mục này chúng tôi phát triển, mở rộng phương pháp chiếu dưới đạo hàm xấp xỉ cho bài toán cân bằng hai cấp $BEP(C, g, f)$.

2.1.1 Thuật toán

Bây giờ, ta đưa ra một số giả thiết sau đây.

(A_1) Với mỗi $x \in C$, ta có $g(x, \cdot)$ khả dưới vi phân trên C, $g(x, \cdot)$ và $f(x, \cdot)$ lồi và nửa liên tục dưới trên toàn không gian $\mathbb{H}$. Hơn nữa, nếu $\{x^k\}$ bị chặn trên C và $\epsilon_k \searrow 0$ khi $k \to \infty$, thì dãy $\{w^k\}$ với $w^k \in \partial_2^{\epsilon_k} g(x^k, x^k)$ cũng bị chặn.

(A_2) Song hàm g giả đơn điệu trên C và thỏa mãn điều kiện para-đơn điệu. Nghĩa là, với mỗi $x^* \in Sol(C, g)$

$$\bar{x} \in C : g(\bar{x}, x^*) = g(x^*, \bar{x}) = 0 \Rightarrow \bar{x} \in Sol(C, g).$$

(A_3) Với mỗi $y \in C$, ta có $g(\cdot, y)$ là nửa liên tục trên yếu trên C;

(A_4) Tập nghiệm $Sol(C, g)$ khác rỗng;

(A_5) Với mỗi $\epsilon \geq 0$, thì $\partial_2^{\epsilon} f(x, x)$ liên tục Lipschitz với hằng số $L > 0$ và β-đơn điệu mạnh trên $\mathbb{H}$.

Thuật toán chiếu dưới đạo hàm xấp xỉ giải bài toán $BEP(C, g, f)$ được mô tả dưới dạng sau.

Thuật toán 2.1. *(Thuật toán chiếu dưới đạo hàm xấp xỉ)*

Khởi tạo. Lấy $x^0 \in C$ bất kỳ, $\epsilon > 0$ và các dãy số thực dương $\{\epsilon_k\}, \{\beta_k\}, \{\xi_k\}, \{\eta_k\}, \{\rho_k\}, \{\tau_k\}$, gán $k := 0$.

Bước 1. Tính

$$x^{k+1} = P_C(y^k - \eta_k u^k). \tag{2.1}$$

Trong đó,

$$\begin{cases} g^k \in \partial_2^{\epsilon_k} g(x^k, x^k), \\ \alpha_k = \frac{\beta_k}{\gamma_k}, \text{ với } \gamma_k = \max\{\rho_k, \|g^k\|\}, \\ y^k \in C : \langle \alpha_k g^k + y^k - x^k, x - x^k \rangle \geq -\xi_k, \quad \forall x \in C, \\ u^k \in \partial_2^{\tau_k} f(y^k, y^k). \end{cases} \tag{2.2}$$

Bước 2. Nếu $\|x^{k+1} - x^k\| < \epsilon$ thì thuật toán dừng. Ngược lại, gán $k := k+1$, và quay về ***Bước 1***.

2.1.2 Sự hội tụ

Trước hết ta có bổ đề sau đây.

Bổ đề 2.2. *Giả sử C là một tập con lồi đóng khác rỗng của không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$. Song hàm $g : C \times C \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $g(x, x) = 0$ với mọi $x \in C$ và với mỗi $x \in C, g(x, y)$ lồi, khả dưới vi phân và nửa liên tục dưới trên C theo biến y. Với mỗi $\epsilon \geq 0$, nếu g là $\beta-$đơn điệu mạnh trên $C, \partial_2^\epsilon g(x, x)$ là liên tục Lipschitz với hằng số $L > 0$ trên C, đồng thời khác rỗng và compact với mọi $x \in C$, thì ánh xạ đa trị*

$$S(x) = \big\{x - \tau\omega_x : \omega_x \in \partial_2^\epsilon g(x, x)\big\}, \ \forall x \in C$$

là $2\sqrt{\tau\epsilon}-$co với hằng số $\delta = \sqrt{1 - \tau(2\beta - \tau L^2)}$, trong đó $\tau \in (0; \frac{2\beta}{L^2})$.

Giả sử các dãy $\{\alpha_k\}, \{\epsilon_k\}, \{\beta_k\}, \{\xi_k\}, \{\eta_k\}, \{\rho_k\}, \{\tau_k\}$ thỏa mãn

$$\begin{cases} 0 < \tau < \beta, \\ \eta_k < \min\left\{\frac{2\beta}{L^2}, \frac{2(\beta-\tau)}{L^2-\tau^2}, \frac{1}{\tau}, \frac{1}{2\beta}\right\}, \sum\limits_{k=0}^{\infty} \eta_k = \infty, \sum\limits_{k=0}^{\infty} \eta_k^2 < \infty, \\ \tau_k \leq \eta_k, \sum\limits_{k=0}^{\infty} \tau_k < \infty, \\ \delta_k = 2(\alpha_k\epsilon_k + \beta_k^2 + \xi_k), \lim_{k\to\infty} \frac{\delta_k}{\eta_k} = 0, \\ \inf_k \rho_k = \rho > 0, \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_k}{\rho_k} = \infty, \sum\limits_{k=0}^{\infty} \beta_k^2 < \infty, \sum\limits_{k=0}^{\infty} \beta_k = \infty, \\ \alpha_k = \frac{\beta_k}{\gamma_k}, \sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k\epsilon_k < \infty, \sum\limits_{k=0}^{\infty} \xi_k < \infty. \end{cases} \tag{2.3}$$

Một ví dụ về các dãy số thỏa mãn (2.3) là $\eta_k := \frac{1}{k+10}$, $\rho_k = 200+k$, $\beta_k = \frac{1}{7k+1}$, $\xi_k = \tau_k = \epsilon_k = 0$. Sự hội tụ của thuật toán 2.1 tới nghiệm của bài toán $BEP(C, g, f)$ được chúng tôi phát biểu thông qua định lý sau.

Định lý 2.1. *Cho C là tập con lồi đóng khác rỗng của không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$. Các song hàm $g : C \times C \to \mathbb{R}$ và $f : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện từ (A_1) đến (A_5). Gọi $\{x^k\}$ là dãy sinh ra bởi thuật toán 2.1. Khi đó dưới các điều kiện (2.3) của tham số, các dãy $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$ hội tụ mạnh về nghiệm duy nhất của bài toán cân bằng hai cấp $BEP(C, g, f)$.*

2.1.3 Ứng dụng cho bài toán cân bằng với ràng buộc là giao của tập nghiệm bài toán cân bằng và tập điểm điểm bất động

Gọi C là một tập con lồi đóng khác rỗng trong không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$, xét các song hàm cân bằng $g : C \times C \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ và ánh xạ không giãn $S : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ tức là,

$$\|S(x) - S(y)\| \leq \|x - y\|, \ \forall x, y \in \mathbb{H}.$$

Trong mục này, chúng tôi mở rộng thuật toán 2.1 cho bài toán tổng quát hơn sau đây:

$$\text{Tìm } x^* \in \Omega \ \text{ sao cho } f(x^*, x) \geq 0, \ \forall x \in \Omega, \tag{2.4}$$

trong đó $\Omega := Sol(C, g) \cap Fix(S)$ với $Sol(C, g) := \{\bar{x} \in C : f(\bar{x}, y) \geq 0, \ \forall y \in C\}$ và $Fix(S) := \{x \in C : S(x) = x\}$. Khi S là ánh xạ đơn vị I, bài toán (2.4) trở thành bài toán cân bằng hai cấp $BEP(C, g, f)$. Thuật toán được mô tả chi tiết như sau.

Thuật toán 2.2.

Khởi tạo. Lấy $x^0 \in C$ bất kỳ, $\epsilon > 0$, và các dãy số thực dương $\{\epsilon_k\}, \{\beta_k\}, \{\xi_k\}, \{\eta_k\}, \{\rho_k\}, \{\tau_k\}$, gán $k := 0$.

Bước 1. Tính

$$x^{k+1} = P_C(\bar{y}^k - \eta_k u^k). \tag{2.5}$$

Trong đó,

$$\begin{cases} g^k \in \partial_2^{\epsilon_k} g(x^k, x^k), \ \alpha_k = \frac{\beta_k}{\gamma_k}, \ \gamma_k = \max\{\rho_k, \|g^k\|\}, \\ y^k \in C \text{ sao cho } \langle \alpha_k g^k + y^k - x^k, x - x^k \rangle \geq -\xi_k, \ \forall x \in C, \\ \bar{y}^k = \gamma_k x^k + (1 - \gamma_k) S(y^k), \\ u^k \in \partial_2^{\tau_k} f(\bar{y}^k, \bar{y}^k). \end{cases} \tag{2.6}$$

Bước 2. Nếu $\|x^{k+1} - x^k\| < \epsilon$ thì thuật toán dừng. Ngược lại, gán $k := k + 1$, và quay về ***Bước 1***.

Sự hội tụ của thuật toán 2.2 được phát biểu thông qua định lý sau.

Định lý 2.2. *Gọi C là một tập con lồi đóng khác rỗng trong không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$. Giả sử các song hàm cân bằng $g : C \times C \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện $(A_1) - (A_3), (A_5)$ và $\Omega \neq \emptyset$, đồng thời các điều kiện (2.3) và $0 < e \leq \gamma_k \leq \bar{e} < 1$, $\lim_{k\to\infty} \gamma_k = h \in [e, \bar{e}]$ được thỏa mãn. Khi đó các dãy $\{x^k\}, \{y^k\}$ sinh ra từ thuật toán 2.2 hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất của bài toán (2.4).*

2.2 Thuật toán dưới đạo hàm tăng cường quán tính

Trong những năm gần đây, thuật ngữ quán tính đã được sử dụng khá phổ biến trong các thuật toán giải bài toán bất đẳng thức biến phân. Nó được coi là một kỹ thuật để tăng tốc độ hội tụ của các thuật toán. Điểm chung của các thuật toán kiểu quán tính là dãy lặp hiện tại phụ thuộc vào sự kết hợp của hai dãy lặp trước đó. Sự thay đổi nhỏ này đã giúp cải thiện đáng kể hiệu quả tính toán của các thuật toán kiểu quán tính. Gần đây, nhiều nhà nghiên cứu đã áp dụng thuật toán kiểu quán tính vào giải các bài toán bất đẳng thức biến phân, điểm bất động, bài toán cân bằng, bài toán chấp nhận tách và một số bài toán tối ưu khác. Hơn nữa, hiệu quả tính toán của các thuật toán kiểu quán tính đã được chỉ ra thông qua nhiều ví dụ tính toán số và ứng dụng.

Trong mục này, chúng tôi kết hợp phương pháp dưới đạo hàm tăng cường với kỹ thuật quán tính để giải bài toán cân bằng hai cấp sau đây:

$$\text{Tìm } x^* \in \Omega \text{ sao cho } \nu h(x^*, y) + \langle \rho F(x^*) - x^*, y - x^* \rangle \geq 0, \ \forall y \in \Omega, \tag{2.7}$$

trong đó, $\rho > 0,\ \nu > 0,\ \Omega := Fix(T) \cap Fix(S) \cap Sol(C, g)$ và $Sol(C, g) := \{x^* \in C : g(x^*, y) \geq 0,\ \forall y \in C\}$, nghĩa là $Sol(C, g)$ là tập nghiệm của bài toán cân bằng sau:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } g(x^*, y) \geq 0,\ \forall y \in C.$$

Ở đây, T, S, F là các ánh xạ từ $\mathbb{H}$ vào $\mathbb{H}$. Các tập $Fix(T), Fix(S)$ là tập điểm bất động của T và S tương ứng.

Dễ thấy, nếu đặt $f(x, y) := h(x, y) + \langle \rho F(x) - x, y - x \rangle$ thì song hàm f thỏa mãn điều kiện cân bằng $f(x, y) = 0,\ \forall x, y \in \mathbb{H}$. Đồng thời bài toán (2.7) trở thành bàn toán cân bằng sau

$$\text{Tìm } x^* \in \Omega \text{ sao cho } f(x^*, y) \geq 0,\ \forall y \in \Omega.$$

2.2.1 Thuật toán

Chúng tôi giả thiết đặt lên các song hàm và ánh xạ giá như sau:

(B_1) Tập nghiệm của bài toán (2.7) khác rỗng;

(B_2) Ánh xạ $T : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ tiệm cận không giãn;

(B_3) Ánh xạ $S : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ là $\zeta-$giả co chặt;

(B_4) Song hàm g giả đơn điệu, liên tục kiểu Lipschitz với các hằng số c_1, c_2. Với mỗi $x \in \mathbb{H}$, thì $g(x, \cdot)$ và $h(x, \cdot)$ là lồi và khả dưới vi phân trên toàn bộ không gian $\mathbb{H}$, đồng thời $g(\cdot, x)$ liên tục yếu trên $\mathbb{H}$;

(B_5) Ánh xạ đa trị $\partial_2 g(x, x)$ là $L-$ liên tục Lipschitz theo biến $x \in \mathbb{H}$;

(B_6) Nếu $x^k \rightharpoonup \hat{x}$ và $w^k \in \partial_2 g(x^k, x^k)$, thì tồn tại dãy con $\{w^{k_j}\}$ của $\{w^k\}$ sao cho $w^{k_j} \rightharpoonup \hat{w} \in \partial_2 g(\hat{x}, \hat{x})$;

(B_7) Song hàm h là $\alpha-$đơn điệu mạnh, $\partial_2 h(x, x)$ liên tục Lipschitz với hằng số $\eta > 0$ và $\chi-$liên tục mạnh, đồng thời là tập compact với mỗi $x \in \mathbb{H}$ cố định;

(B_8) Ánh xạ $F : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ là $\beta-$đơn điệu mạnh và $\kappa-$liên tục Lipschitz sao cho $\delta < \tau := 1 - \sqrt{1 - \rho(2\beta - \rho\kappa^2)}$, trong đó $\rho \in (0, \frac{2\beta}{\kappa^2})$, $\nu \in (0, \frac{2\alpha}{\eta^2})$ và $\delta = \sqrt{1 - \nu(2\alpha - \nu\eta^2)}$.

Đồng thời các tham số chính quy thỏa mãn

$$\begin{cases} \{\alpha_k\} \subset (0,1), \lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = 0, \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty, \\ \{\sigma_k\} \subset [0,1], \beta_k > 0, \gamma_k > 0, \delta_k > 0, \\ \sup\left\{\frac{\sigma_k}{\alpha_k} : k \geq 1\right\} < \infty, \beta_k + \gamma_k + \delta_k = 1, \\ \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\theta_k}{\alpha_k} = 0, (\gamma_k + \delta_k)\zeta \leq \gamma_k, \\ 0 < \liminf\limits_{k\to\infty} \beta_k \leq \limsup\limits_{k\to\infty} \beta_k < 1, \liminf\limits_{k\to\infty} \delta_k > 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

Ta có các dãy số $\alpha_k = \frac{1}{20k+100}, \beta_k = 0,1 + \frac{1}{15k+50}, \gamma_k = 0,25(1 - \beta_k), \delta_k = 1 - \beta_k - \gamma_k, \sigma_k = \frac{1}{4k+9}$ thỏa mãn (2.8). Thuật giải cho bài toán (2.7) được mô tả như sau:

Thuật toán 2.3. *(Thuật toán dưới đạo hàm tăng cường quán tính)*

Khởi tạo. Lấy $x_0, x_1 \in \mathbb{H}, \epsilon > 0$ và các tham số $\gamma \in (0, +\infty), l \in (0,1)$, $\mu \in (0,1)$, gán $k := 0$.

Bước 1. Đặt $w^k = T^k x^k + \sigma_k(T^k x^k - T^k x^{k-1})$. Tính

$$y^k = \operatorname{argmin}\left\{\tau_k g(w^k, y) + \frac{1}{2}\|y - w^k\|^2 : y \in C\right\},$$

với $\psi^k \in \partial_2 g(w^k, w^k)$ và $\tau_k = \gamma l^m$ được chọn là số τ bé nhất thuộc $\{\gamma, \gamma l, \gamma l^2, \cdots\}$ thỏa mãn $0 < \tau_k < \xi < \min\{\frac{1}{2c_1}, \frac{1}{2c_2}\}$ và điều kiện kiểu Armijo

$$\tau \left\|\psi^k - \mathrm{P}_{\partial 2g(y^k, y^k)}(\psi^k)\right\| \leq \mu\|w^k - y^k\|. \tag{2.9}$$

Bước 2. Tính

$$u^k = \operatorname{argmin}\left\{\tau_k g(y^k, y) + \frac{1}{2}\|y - w^k\|^2 : y \in C_k\right\},$$

trong đó $C_k := \left\{x \in \mathbb{H} : \langle w^k - \tau_k \widehat{w}^k - y^k, x - y^k\rangle \le 0\right\}$,

$$\text{với } \widehat{w}^k \in \partial_2 g(w^k, y^k) \text{ sao cho } C \subset C_k.$$

Bước 3. Tính

$$z^k = \alpha_k \xi^k + (I - \alpha_k \rho F) T^k u^k,$$

ở đây

$$\xi^k = x^k - \nu \hat{\xi}^k, \text{ và } \hat{\xi}^k \in \partial_2 h(x^k, x^k)$$

Bước 4. Tính

$$x^{k+1} = \beta_k x^k + \gamma_k z^k + \delta_k S z^k. \tag{2.10}$$

Bước 5. Nếu $\|x^{k+1} - x^k\| < \epsilon$ thì thuật toán dừng. Ngược lại, gán $k := k + 1$ và quay lại ***Bước 1.***

2.2.2 Kết quả hội tụ

Định lý 2.3. *Nếu $T^k x^k - T^{k+1} x^k \to 0$, thì*

$$x^k \to x^* \textit{ khi và chỉ khi } \begin{cases} x^k - x^{k+1} \to 0, \\ x^k - y^k \to 0, \end{cases}$$

trong đó, $x^* \in \Omega$ là một nghiệm của bài toán (2.7).

2.3 Kết luận chương 2

Sau đây là một số kết quả chính thu được trong Chương 2 này.

(a) Xây dựng thuật toán chiếu dưới đạo xấp xỉ cho bài toán cân bằng hai cấp $BEP(C, f, g)$ trên không gian Hilbert $\mathbb{H}$, với song hàm giá cấp 2 đơn điệu mạnh và song hàm giá cấp 1 giả đơn điệu. Trong thuật toán của chúng tôi, tại mỗi vòng lặp chỉ cần tính các dưới đạo hàm của song hàm giá theo biến thứ 2 và thực hiện một phép chiếu lên tập ràng buộc C. Dưới các điều kiện thích hợp chúng tôi đã chỉ ra được sự hội tụ mạnh của thuật toán về nghiệm duy nhất của bài toán $BEP(C, g, f)$.

(b) Đề xuất thuật toán dưới đạo hàm tăng cường kết hợp với kỹ thuật quán tính cho bài toán cân bằng hỗn hợp với ràng buộc là giao của tập nghiệm bài toán cân bằng và các tập điểm bất động của ánh xạ tiệm cận không giãn, ánh xạ giả co chặt. Chứng minh sự hội tụ của dãy lặp về nghiệm của bài thông qua Định lý 2.3.

(c) Áp dụng Thuật toán 2.1 cho bài toán cân bằng với ràng buộc là giao tập điểm bất động của ánh xạ không giãn với tập nghiệm của một bài toán cân bằng. Kết quả hội tụ được chỉ ra trong Định lý 2.2.

(d) Lấy các ví dụ số minh họa cho Thuật toán 2.1 và so sánh kết quả với một số thuật toán trước đó.

Chương 3

PHƯƠNG PHÁP ĐẠO HÀM TĂNG CƯỜNG

Phương pháp đạo hàm tăng cường được đề xuất bởi G.M. Korpelevich cho bài toán tìm điểm yên ngựa, sau đó được áp dụng cho bài toán bất đẳng thức biến phân đơn điệu và giả đơn điệu. Đến năm 2014, T.D. Quoc và các cộng sự đã mở rộng phương pháp này cho bài toán cân bằng $EP(C, g)$. Trong các ví dụ minh họa số của mình các tác giả cũng đã chỉ ra được tính ưu việt của thuật toán đạo hàm tăng cường so với thuật toán điểm gần kề. Sau này thuật toán tiếp tục được cải tiến bởi một số tác giả như P.N. Anh (2013), Y. Liu, H. Kong (2019)...

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu mở rộng phương pháp đạo hàm tăng cường cho một lớp bài toán cân bằng hai cấp $BEP(C, g, f, \Phi)$ có dạng

$$\text{Tìm } \hat{x} \in Sol(C, g, \Phi) \text{ sao cho } f(\hat{x}, y) \geq 0, \quad \forall y \in Sol(C, g, \Phi). \tag{3.1}$$

Trong đó, f, g là các song hàm từ $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ vào $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện cân bằng $f(x, x) = g(x, x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Phi : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ là một hàm lồi và $Sol(C, g, \Phi)$ là tập nghiệm của bài toán cân bằng $EP(C, g, \Phi)$:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } g(x^*, y) + \Phi(y) - \Phi(x^*) \geq 0, \quad \forall x \in C. \tag{3.2}$$

Dễ thấy khi $\Phi \equiv 0$, bài toán $BEP(C, g, f, \Phi)$ trở thành bài toán cân bằng hai cấp $BEP(C, g, f)$. Khi $f \equiv 0$ và $g \equiv 0$, nó trở thành bài toán $OP(C, \Phi)$.

Trong thuật toán mà chúng tôi đề xuất, tại mỗi bước lặp chúng tôi thực hiện giải ba bài toán tối ưu lồi mạnh. Từ x^k đã biết chúng tôi giải bài toán thứ nhất được nghiệm duy nhất và gán cho y^k. Sau khi có y^k chúng tôi thực hiện giải bài toán thứ hai và gán nghiệm cho z^k. Sau khi có z^k bài toán thứ ba được giải và nghiệm được gán cho x^{k+1}. Chúng tôi sử dụng điều kiện dừng khá phổ biến là $\|x^{k+1} - x^k\| < \epsilon$ với ϵ là số dương cho trước. Nội dung chính của Chương 3 được được viết dựa trên kết quả trong công trình [CT2].

3.1 Thuật toán

Thuật giải đạo hàm tăng cường giải bài toán $BEP(C, g, f, \Phi)$ với các giả thiết dưới đây.

(C_1) $Sol(C, g, \Phi) \neq \emptyset$;

(C_2) Song hàm g là đơn điệu, liên tục Lipschitz với các hằng số c_1, c_2 và liên tục yếu, tức là: $x^k \rightharpoonup \hat{x}$ và $y^k \rightharpoonup \hat{y} \Longrightarrow g(x^k, y^k) \to g(\hat{x}, \hat{y})$;

(C_3) Hàm Φ chính thường, lồi và nửa liên tục dưới;

(C_4) Song hàm f là η- đơn điệu mạnh và liên tục yếu;

(C_5) Tồn tại các ánh xạ $\bar{f}_i : C \times C \to \mathbb{H}$ và $\hat{f}_i : C \to \mathbb{H}$ với mỗi $i \in \{1, ..., m\}$ sao cho $\bar{f}_i(x, y) + \bar{f}_i(y, x) = 0, \|\bar{f}_i(x, y)\| \leq \bar{L}_i\|x - y\|$ và $\|\hat{f}_i(x) - \hat{f}_i(y)\| \leq \hat{L}_i\|x - y\|$ với mọi $x, y \in C$ và

$$f(x, y) + f(y, z) \geq f(x, z) + \sum_{i=1}^{m} \left\langle \bar{f}_i(x, y), \hat{f}_i(y - z) \right\rangle, \ \forall x, y, z \in C.$$

Thuật toán 3.1. *(Thuật toán đạo hàm tăng cường)*

Khởi tạo. Lấy $x^0 \in C$ bất kỳ, $\epsilon > 0$ và gán $k := 0$.

Bước 1. Tính

$$\begin{cases} y^k = \text{argmin}\left\{\lambda_k[g(x^k, y) + \Phi(y)] + \frac{1}{2}\|y - x^k\|^2 : y \in C\right\} \\ z^k = \text{argmin}\left\{\lambda_k[g(y^k, z) + \Phi(z)] + \frac{1}{2}\|z - x^k\|^2 : z \in C\right\}. \end{cases}$$

Bước 2. Tính

$$x^{k+1} = \text{argmin}\left\{\beta_k f(z^k, t) + \frac{1}{2}\|t - z^k\|^2 : t \in C\right\}.$$

Bước 3. Nếu $\|x^{k+1} - x^k\| < \epsilon$ thì dừng thuật toán. Ngược lại, gán $k := k + 1$ và quay trở lại ***Bước 1***.

3.2 Sự hội tụ của thuật toán

Đặt $S := \sum_{i=1}^{m} \bar{L}_i\hat{L}_i$. Chọn các tham số $\lambda_k (k \geq 0), \beta_k$ sao cho

$$\begin{cases} \{\lambda_k\} \subset (a, b) \subset \left(0, \min\left\{\frac{1}{2c_1}, \frac{1}{2c_2}\right\}\right), \lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = \lambda > 0, \\ \beta_k \searrow 0, 2\beta_k\eta - \beta_k^2 S^2 < 1, \\ 0 < \tau < \min\{\eta, S\}, 0 < \beta_k < \min\left\{\frac{1}{\tau}, \frac{2\eta - 2\tau}{S^2 - \tau^2}, \frac{2\eta}{S^2}\right\}. \end{cases} \tag{3.3}$$

Khi đó, $\delta_k := \sqrt{1 - 2\beta_k\eta + \beta_k^2 S^2} \in (0, 1)$. Các tham số $\xi = 61, \eta = \xi - 57,9677, S = \sqrt{2(2\xi^2 + 2\xi + 1)} + 58,9677, c_1 = c_2 = 5, \lambda_k = \frac{1}{2c_1 + 1 + k}, \beta_k = \frac{2\eta}{S^2(k^2 + 2)}$ thỏa mãn (3.3).

Tiếp theo, chúng tôi phát biểu và chứng minh định lý hội tụ của thuật toán 3.1.

Định lý 3.1. *Giả sử rằng các giả thiết* $(C_1) - (C_5)$ *được thỏa mãn và các tham số thỏa mãn* (3.3)*. Khi đó, các dãy* $\{x^k\}, \{y^k\}$ *và* $\{z^k\}$ *sinh ra từ thuật toán* 3.1 *hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất* x^* *của bài toán* $BEP(C, g, f, \Phi)$.

3.3 Kết luận chương 3

Trong chương này, chúng tôi áp dụng phương pháp đạo hàm tăng cường cho bài toán cân bằng hai cấp $BEP(C, g, f, \Phi)$ với miền ràng buộc cân bằng hỗn hợp. Các kết quả chính thu được như sau:

(a) Đề xuất thuật toán đạo hàm tăng cường cho bài toán $BEP(C, g, f, \Phi)$ trên không gian Hilbert $\mathbb{H}$, tại mỗi bước lặp của thuật toán, chúng tôi chỉ cần giải ba bài toán tối ưu lồi mạnh.

(b) Chứng minh sự hội tụ của dãy lặp sinh ra bởi thuật toán 3.1 về nghiệm duy nhất của bài toán $BEP(C, g, f\Phi)$ dưới các điều kiện thích hợp.

(c) Ứng dụng thuật toán cho mô hình cân bằng kinh tế Nash - Cournot và so sánh kết quả với một số thuật toán trước đó.

Chương 4

NGUYÊN LÝ BÀI TOÁN PHỤ DC

Nguyên lý bài toán phụ được đề xuất lần đầu tiên bởi G. Cohen vào năm 1980 cho bài toán tối ưu. Sau đó, năm 1988 chính G. Cohen mở rộng cho bài toán bất đẳng thức biến phân và nó đã trở thành một công cụ hữu hiệu cho việc phân tích, phát triển các thuật giải cho các bài toán tối ưu nói chung và bài toán bất đẳng thức biến phân nói riêng. Gần đây, G. Mastroeni đã sử dụng nguyên lý này cho bài toán cân bằng đơn điệu mạnh:

$$\begin{cases} x^0 \in C, k = 0; \\ x^{k+1} = \operatorname{argmin}\{\lambda f(x^k, y) + \frac{1}{2}\|y - x^k\|^2 : y \in C\}. \end{cases}$$

Tuy nhiên, các dãy lặp trong thuật toán này có thể không hội tụ, khi ánh xạ giá đơn điệu hoặc giả đơn điệu. Để khắc phục điều này, T.Đ. Quốc và cộng sự mở rộng phương pháp đạo hàm tăng cường của G.M. Korpelevich giải bài toán cân bằng đơn điệu. Dãy lặp có dạng sau:

$$\begin{cases} x^0 \in C, k = 0 \\ y^k = \operatorname{argmin}\{\lambda f(x^k, y) + \frac{1}{2}\|y - x^k\|^2 : y \in C\} \\ x^{k+1} = \operatorname{argmin}\{\lambda f(y^k, y) + \frac{1}{2}\|y - x^k\|^2 : y \in C\}. \end{cases}$$

Tại mỗi bước lặp, thuật toán giải hai bài tối ưu lồi mạnh.

Trong chương này, với việc kết hợp nguyên lý bài toán phụ nói trên với kỹ thuật phân tích DC cho việc tìm nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân affine. Chúng tôi giới thiệu phương pháp nguyên lý bài toán phụ DC, giải bài toán cân bằng trên tập nghiệm bài toán bất đẳng thức biến phân affine. Nội dung chính của chương này được viết dựa trên bài báo [CT3] trong danh mục các công trình liên quan đến Luận án.

4.1 Nguyên lý bài toán phụ DC

Cho C là một tập con lồi đóng khác rỗng của không gian $\mathbb{R}^n$, $f : C \times C \to \mathbb{R}$ là một song hàm giá thỏa mãn điều kiện cân bằng $f(x, x) = 0$ với mọi $x \in C$, và G là một toán tử từ C vào $\mathbb{R}^n$. Bài toán cân bằng với ràng buộc bất đẳng thức biến phân (the lexicographic equilibrium problems) được định nghĩa như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in \mathrm{Sol}(C,G) \text{ sao cho } f(x^*,x) \geq 0,\ \forall x \in \mathrm{Sol}(C,G), \tag{4.1}$$

trong đó, tập $\mathrm{Sol}(C,G)$ được xác định như sau

$$\mathrm{Sol}(C,G) := \{x \in C : \langle G(x), y-x\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C\}. \tag{4.2}$$

Với $G : C \to \mathbb{R}^n$ là ánh xạ affine cho bởi $G(x) = Qx + q$, $C = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$, với ma trận $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ đối xứng, ma trận $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ và các véc tơ $q \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$. Khi $q = 0$, M.S. Gowda (1989) đã chỉ ra rằng ma trận Q là ma trận giả đơn điệu trên C tương đương với G là giả đơn điệu trên C.

Thuật toán chúng tôi đề xuất với một số giả thiết đặt ra như sau:

(D_1) Ánh xạ G giả đơn điệu, song hàm f là đơn điệu mạnh với hằng số $\beta > 0$;

(D_2) Song hàm f thỏa mãn điều kiện Lipschitz với hằng số $\kappa := \sum_{i=1}^r L_iK_i$, trong đó $\kappa > \beta$, nghĩa là, tồn tại các hằng số $L_i > 0$ và $K_i > 0$, các ánh xạ $\bar{\alpha}_i : C\times C \to C$ và $\hat{\alpha}_i : C \to C$ sao cho, với mọi $x, y, z \in C$, $i \in \{1,\dots,r\}$,

$$\begin{aligned} &f(x,y) + f(y,z) \geq f(x,z) + \sum_{i=1}^r \langle \bar{\alpha}_i(x,y), \hat{\alpha}_i(y-z)\rangle,\\ &\bar{\alpha}_i(x,y) + \bar{\alpha}_i(y,x) = 0, \quad \|\bar{\alpha}_i(x,y)\| \leq L_i\|x-y\|,\\ &\|\hat{\alpha}_i(x) - \hat{\alpha}_i(y)\| \leq K_i\|x-y\|; \end{aligned}$$

(D_3) Hàm $f(x,\cdot)$ lồi với mỗi $x \in C$. Mọi dãy $\{y^k\} \subset C$ thỏa mãn $y^k \to d$, ta có $\limsup_{k\to\infty} \frac{|f(d,y^k)|}{\|y^k-d\|} < +\infty$;

(D_4) Kí hiệu I là ma trận đơn vị. Tham số η thỏa mãn điều kiện

$$\eta > \max\left\{-6\tau_1(Q), \nu, \frac{\kappa^2\|Q\|}{\beta^2}, \frac{-2\tau_1(Q)(\beta^2+\kappa^2)}{\beta^2}\right\}, \tag{4.3}$$

$$0 < \tau < \min\{\beta, \sqrt{2}\kappa\}, \quad 0 < \alpha_k < \frac{2(\beta-\tau)}{2\kappa^2-\tau^2},$$

$$\sum_{k=1}^\infty \alpha_k = +\infty, \quad \lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0, \tag{4.4}$$

$$Q + \eta I \text{ là ma trận xác định dương .} \tag{4.5}$$

Cho ma trân

$$Q = \begin{pmatrix} 9 & 1 & -2 & 0 & \dots & 0 & -10\\ 1 & -5 & 7 & 0 & \dots & 0 & -7\\ -2 & 7 & 6 & 0 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 6 & 3\\ -10 & -7 & 0 & 0 & \dots & 3 & -9 \end{pmatrix}_{n\times n},$$

với $n = 10$, khi đó các tham số $\kappa = 3,9226, \beta = 0,1409, \eta = 210, \alpha_k = \frac{1}{2k+30}$ thỏa mãn các điều kiện (D_4).

Thuật toán của chúng tôi được mô tả như sau

Thuật toán 4.1. *(Thuật toán nguyên lý bài toán phụ DC)*

Khởi tạo. Lấy điểm $x^0 \in C$ bất kỳ, $\epsilon > 0$, gán $k := 0$

Bước 1. Tính

$$y^k = \text{argmin} \left\{ \frac{1}{2}\langle Qx, x\rangle + \langle q, x\rangle + \frac{\eta}{2}\|x - x^k\|^2 : x \in C \right\}. \tag{4.6}$$

Bước 2. Tính

$$x^{k+1} = \text{argmin} \left\{ \alpha_k f(y^k, y) + \frac{1}{2}\|y - y^k\|^2 : y \in C \right\}. \tag{4.7}$$

Bước 3. Nếu $\|x^{k+1} - x^k\| < \epsilon$ thì thuật toán dừng. Ngược lại, gán $k := k + 1$ và quay trở lại ***Bước 1***.

4.2 Định lý hội tụ

Định lý lý dưới đây chỉ ra rằng, dãy lặp của thuật toán 4.1 hội tụ về nghiệm của bài toán (4.1) dưới những giả thiết thích hợp.

Định lý 4.1. *Giả sử các điều kiện từ* (D_1) *đến* (D_4) *được thỏa mãn. Khi đó, các dãy* $\{x^k\}$ *và* $\{y^k\}$ *sinh ra từ thuật toán* 4.1 *hội tụ tới nghiệm duy nhất của bài toán* (4.1).

4.3 Sai số thuật toán

Trong trường hợp f là song hàm và tập C tổng quát, bài toán (4.7) bao gồm nhiều loại bài toán tối ưu cổ điển trong thực tế, chẳng hạn như: Bài toán tối ưu trên tập đồ thị, tối ưu mạng, quy hoạch nón, quy hoạch hình học, quy hoạch lồi đơn điệu, điều khiển dự đoán mô hình .... Hiện này, có nhiều phương pháp tối ưu đã được áp dụng cho bài toán (4.7) như: Phương pháp điểm trong, phương pháp hướng giảm và hướng giảm nhanh, phương pháp giảm có điều kiện, phương pháp tách, phương pháp tọa độ gốc và phương pháp kiểu hướng giảm ngẫu nhiên. Tuy nhiên, việc giải bài toán phụ (4.7) để tìm nghiệm chính xác là một việc không dễ. Chính vì vậy, một số phương pháp xấp xỉ giải bài toán phụ trên với những cải tiến hợp lý đã được đề xuất như trong nghiên cứu của D. Han (2007), E. Zeidler (1986), L.C. Zeng, J.C. Yao (2005).... Điều kiện dừng cho thuật toán 4.1 như sau:

$$\left\| y^k - \text{argmin} \left\{ \frac{1}{2}\langle Qx, x\rangle + \langle q, x\rangle + \frac{\eta}{2}\|x - x^k\|^2 : x \in C \right\} \right\| \le \epsilon, \tag{4.8}$$

và
$$\left\| x^{k+1} - \operatorname{argmin}\left\{ \alpha f(y^k, y) + \frac{1}{2}\|y - y^k\|^2 : y \in C \right\} \right\| \leq \epsilon. \tag{4.9}$$

Với mỗi $\chi > 0$, ký hiệu $\chi-$tập nghiệm của bài toán (4.1) là Sol_χ. Khi đó, $\mathrm{Sol}_\chi = \{x^k : \|x^{k+1} - x^k\| \leq \chi\}$. Đặt

$$\begin{cases} \hat{y}^k & = \operatorname{argmin}\left\{ \frac{1}{2}\langle Qx, x\rangle + \langle q, x\rangle + \frac{\eta}{2}\|x - x^k\|^2 : x \in C \right\} \\ \hat{x}^{k+1} & = \operatorname{argmin}\left\{ \alpha f(\hat{y}^k, y) + \frac{1}{2}\|y - \hat{y}^k\|^2 : y \in C \right\}. \end{cases}$$

Mục đích chính của chúng tôi trong mục này là nghiên cứu sự hội tụ của các dãy lặp xấp xỉ (4.8)-(4.9). Giả sử rằng, tồn tại $\sigma > 0$ và $\delta > 0$ sao cho

$$C \subseteq B(x^*, \sigma), \quad f(C, C) := \{f(x, y) : x, y \in C\} \subseteq B(0, \delta). \tag{4.10}$$

Ta chọn các tham số thỏa mãn điều kiện (2.8) và

$$\begin{cases} 0 < \epsilon < \bar{\epsilon}, \quad \bar{\epsilon}^2 > 2\alpha(\delta + \kappa\sigma) + \epsilon^2(1 + \Lambda)^2 \\ \Gamma_\eta := \frac{\eta\bar{\epsilon}^2}{\eta + 2\tau_1(Q)} + \frac{2\tau_1(Q)\sigma^2}{\eta - 2\tau_1(Q)} - 2\alpha(\delta + \kappa\sigma) - \epsilon^2(1 + \Lambda)^2 > 0. \end{cases} \tag{4.11}$$

Để ý rằng $\lim_{\eta\to\infty} \Gamma_\eta = \bar{\epsilon}^2 - 2\alpha(\delta + \kappa\sigma) - \epsilon^2(1 + \Lambda)^2 > 0$, bởi vậy, tồn tại tham số $\eta > 0$ sao cho điều kiện (4.11) được thỏa mãn.
Ta có định lý sau:

Định lý 4.2. *Giả sử rằng các điều kiện $(D_1) - (D_2)$, (4.3)-(4.5), (4.10) và (4.11) được thỏa mãn. Cùng với các giả thiết sau*

(i) $\alpha\delta \leq \epsilon^2$,

(ii) *tồn tại số nguyên dương K sao cho $K > \frac{4\sigma^2}{\Gamma_\eta}$,*

(iii) *các dãy $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$ được định nghĩa bởi (4.8)-(4.9).*

Khi đó, tồn tại số nguyên $j \in [0, K]$ sao cho

(a) $\|x^j - y^j\| \leq 2\bar{\epsilon}$;

(b) $\|x^i - y^i\| > 2\bar{\epsilon}$ *với mọi* $i = 0, 1, \ldots, j - 1$;

(c) $x^j \in \mathrm{Sol}_{\underline{\epsilon}}$, *trong đó* $\underline{\epsilon} := 2\bar{\epsilon} + 3\epsilon$.

4.4 Kết luận chương 4

Với sự kết hợp giữa nguyên lý bài toán phụ cho bài toán cân bằng và kỹ thuật phân tích DC cho bài toán bất đẳng thức biến phân affine, trong chương này, chúng tôi đề xuất một thuật toán mới giải bài toán cân bằng với ràng buộc bất đẳng thức biến phân affine. Kết quả cụ thể thu được trong chương này như sau:

(a) Xây dựng thuật toán nguyên lý bài toán phụ DC cho bài toán cân bằng với tập ràng buộc là tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức affine. Dưới các điều kiện phù hợp chúng tôi cũng chỉ ra được sự hội tụ của dãy lặp về nghiệm của bài toán (4.1).

(b) Chúng tôi cũng chỉ ra được rằng các dãy xấp xỉ với độ chính xác ϵ cho trước sinh ra từ thuật toán cũng hội tụ về một điểm thuộc tập χ-nghiệm nào đó thông qua định lý 4.2.

(c) Lấy các ví dụ minh họa số cho thuật toán chúng tôi đề xuất. Ví dụ thứ nhất cho kết quả nghiệm xấp xỉ sau 25 vòng lặp, ví dụ thứ hai chúng tôi so sánh với các thuật toán SPA và thuật toán SEA.

KẾT LUẬN

Luận án tập trung nghiên cứu đề xuất các thuật toán mới giải các lớp bài toán cân bằng hai cấp. Các thuật toán mới được nghiên cứu dưa trên các phương pháp chiếu tổng quát, chiếu dưới đạo hàm, nguyên lý bài toán phụ và các kỹ thuật trong Lý thuyết tối ưu.

1. Những kết quả chính đã đạt được trong luận án:

- Thuật toán chiếu dưới đạo hàm xấp xỉ cho bài toán cân bằng đơn điệu mạnh với ràng buộc cân bằng giả đơn điệu (thường được gọi là bài toán cân bằng hai cấp đơn điệu). Thuật toán này được chúng tôi phát triển từ thuật toán chiếu của P. Santos và cộng sự trong cho bài toán cân bằng giả đơn điệu. Ưu điểm của thuật toán chính là sự đơn giản trong tính toán tại mỗi bước lặp. Kết quả này được thể hiện trong công trình [CT1].

- Thuật toán dưới đạo hàm tăng cường kết hợp với kỹ thuật kiểu quán tính cho bài toán cân bằng với ràng buộc là giao của tập nghiệm bài toán cân bằng giả đơn điệu với tập điểm bất động của các ánh xạ tiệm cận không giãn và giả co chặt. Bằng việc sử dụng kỹ thuật kiểu quán tính các kết quả thử nghiệm số đã chỉ ra rằng tốc độ hội tụ của thuật toán được cải thiện đáng kể. Kết quả này được thể hiện trong công trình [CT4].

- Thuật toán đạo hàm tăng cường cho bài toán cân bằng với ràng buộc cân bằng hỗn hợp. Thuật toán này còn được gọi là thuật toán chiếu hai lần tổng quát được phát triển từ phương pháp đạo hàm tăng cường của G.M. Korpelevich cho bài toán tìm điểm yên ngựa. Tính hữu hiệu của nó đã được chứng minh trong cả lý thuyết lẫn các ví số. Kết quả này được thể hiện trong công trình [CT2].

- Thuật toán nguyên lý bài toán phụ DC cho bài toán cân bằng với ràng buộc bất đẳng thức biến phân affine. Như chúng ta đã biết, kỹ thuật phân tích hiệu hai hàm lồi được sử dụng rất hiệu quả cho bài toán quy hoạch không lồi nói chung và bài toán quy hoạch toàn phương nói riêng. Dựa vào mối liên hệ giữa bài toán bất đẳng thức biến phân affine và bài toán quy hoạch toàn phương, chúng tôi áp dụng kỹ thuật phân tích DC kết hợp với nguyên lý bài toán phụ và thu được một thuật giải rất hữu hiệu cho bài toán cân bằng hai cấp. Kết quả này được thể hiện trong công trình [CT3].

- Một số tính toán minh họa cho thuật toán đề xuất trên, áp dụng cho mô hình cân bằng kinh tế Nash-Cournot. So sánh kết quả với các thuật toán đã được đề xuất trước đó.

2. Một số hướng có thể tiếp tục nghiên cứu của luận án

Sau đây là các hướng mà chúng tôi sẽ tiếp tục nghiên cứu sau khi hoàn thành luận án này.

- Cải thiện tốc độ cũng như thời gian tính toán của các thuật toán đã được đề xuất bằng cách kết hợp với một số kỹ thuật như kỹ thuật quán tính, lặp Halpern, lặp Mann, ...

- Nghiên cứu đánh giá tốc độ hội tụ của thuật toán, cách chọn tham số để có được sự hội tụ tốt hơn.

- Nghiên cứu các thuật toán nhằm giảm nhẹ các điều kiện áp lên các song hàm giá, đặc biệt là song hàm giá ở cấp thứ hai cũng như giảm số phép chiếu lên tập ràng buộc C tại mỗi bước lặp của thuật toán.

- Mở rộng nghiên cứu phương pháp giải cho bài toán cân bằng nhiều cấp hơn như ba cấp, bốn cấp, . . .

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC CỦA TÁC GIẢ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

[**CT1**] P.N. Anh, H.P. Tu (2021), "Subgradient projection methods extended to monotone bilevel equilibrium problems in Hilbert spaces", *Numerical Algorithms* 86, pp. 55-74 (SCIE, Q1).

[**CT2**] P.N. Anh, D.D. Thanh, N.K. Linh, H.P. Tu (2021), "New Explicit Extragradient Methods for Solving a Class of Bilevel Equilibrium Problems", *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society* 44, pp. 3285-3305 (SCIE, Q2).

[**CT3**] P.N. Anh, Q.H. Ansari, H.P. Tu (2023), "DC auxiliary principle methods for solving lexicographic equilibrium problems", *Journal of Global Optimization* 85, pp. 129-153 (SCI, Q1).

[**CT4**] P.N. Anh, H.P. Tu, H.P. Dung (Submitted: 08/11/2022), "Inertial subgradient projection techniques for solving a class of bilevel equilibrium problems", *Optimization*(SCIE, Q1).