ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

NGUYỄN ĐẶNG TUYÊN

MỘT VÀI KHÍA CẠNH CỦA TOÁN TỬ P-LAPLACE TRÊN CÁC ĐA TẠP RIEMANN

Chuyên ngành: Toán giải tích
Mã số: 9460101.02

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội, 2023

Công trình được hoàn thành tại: Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội.

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

PGS. TS. Nguyễn Thạc Dũng

PGS. TS. Phạm Đức Thoan

Phản biện :..

....

Phản biện :..

....

Phản biện :..

....

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng đánh giá luận án tiến sĩ họp tại Trường Đại học Khoa học Tự nhiên - ĐHQGHN vào hồi..........giờ........ ngày..........tháng.......... năm..........

Có thể tìm hiểu luận án tại:

- Thư viện Quốc gia Việt Nam.

- Trung tâm Thư viện và Tri thức số, Đại học Quốc gia Hà Nội.

MỞ ĐẦU

1. Tổng quan về tình hình nghiên cứu

Giải tích hình học là một lí thuyết toán học đẹp đẽ liên kết hình học, giải tích và tô pô, trong đó giải tích là công cụ chính để nghiên cứu hình học và tô pô của các đa tạp Riemann. Chúng ta đã biết rằng nhóm đồng điều kì dị trên một đa tạp trơn, compact có thể được nghiên cứu thông qua lí thuyết phân tích Hodge và nhóm đối đồng điều De Rham trên các dạng vi phân. Đây là một kết quả nổi tiếng trong tô pô và giải tích. Hơn nữa, định lí tách cổ điển của Cheeger – Gromoll khẳng định rằng nếu một đa tạp đầy đủ M với độ cong Ricci không âm có chứa một đường thẳng trắc địa thì nó đẳng cự với một hình trụ $N \times \mathbb{R}$ trong đó N là một đa tạp Riemann với độ cong Ricci không âm. Sau này, P. Li và J. Wang đã tổng quát hóa kết quả của Cheeger-Gromoll lên các đa tạp với độ cong Ricci bị chặn dưới. Kết quả của Li-Wang nói rằng nếu giá trị riêng thứ nhất của toán tử Laplace đạt giá trị cực đại thì các đa tạp này hoặc liên thông tại vô hạn hoặc có tính chất tách. Do đó, ta có thể sử dụng lí thuyết tuyến tính của toán tử Laplace, đặc biệt lí thuyết dạng vi phân điều hòa để tìm hiểu các tính chất hình học và tô pô của các đa tạp.

Một trong các bài toán thú vị của hình học và tô pô là đi tìm các điều kiện đủ trên một đa tạp đầy đủ sao cho ta có thể thu được các định lí triệt tiêu cho các dạng vi phân điều hòa hoặc p-điều hòa. Đây là một vấn đề thú vị bởi vì như chúng ta biết, khi M là đa tạp compact thì không gian các ℓ-dạng vi phân điều hòa đẳng cấu với nhóm đối đồng đều De Rham thứ ℓ của nó. Mặc dù, điều này không đúng cho trường hợp M không compact nhưng việc nghiên cứu các dạng vi phân L^2 điều hòa là quan trọng. Với giả sử độ cong Ricci bị chặn dưới, P. Li đã chứng minh rằng trên đa tạp compact, không gian các ℓ-dạng vi phân điều hòa có chiều hữu hạn. P. Li và J. Wang đã chứng minh được một định lí triệt tiêu của các 1-dạng vi phân L^2 điều hòa nếu độ cong Ricci bị chặn dưới bởi số hạng chứa số chiều và giá trị riêng thứ nhất. Gần đây, H. Lin xét đa tạp Riemann với độ cong vô hướng không âm và thu được một định lí triệt tiêu nếu M thỏa mãn một bất đẳng thức Poincaré có trọng.

Lí thuyết về các dạng vi phân L^2 điều hòa đã được phát triển nhiều. Một vấn đề rất tự nhiên là tìm các kết quả tương tự cho không gian các dạng vi phân L^Q p-điều hòa. Đối với 1-dạng vi phân p-điều hòa, khi một bất đẳng thức Poincaré có trọng đúng trên M, Chang-Chen-Wei thu được một vài định lí triệt tiêu cho các hàm p-điều hòa với năng lượng L^q hữu hạn, trong đó $p > 1$ và $q \in \mathbb{R}^+$. Hơn nữa, X. Zhang thu được một định lí triệt tiêu nếu M có độ cong Ricci không âm. Xuất phát từ kết quả này, Chang-Guo-Sung tổng quát hóa kết quả của X. Zhang và thu được tính compact cho bất kì tập hợp bị chặn của các 1-dạng vi phân p-điều hòa. Y. B. Han, Q. Y. Zhang và M. H. Liang thu được một vài định lí về tính hữu hạn và tính triệt tiêu dưới giả thiết về độ cong vô hướng và độ cong Ricci. Bên cạnh đó, Sung-Wang sử dụng lí thuyết về các hàm p-điều hòa để chỉ ra vài tính chất của đa tạp Riemann với p-phổ lớn nhất. Năm 2017, N. T. Dũng chứng minh định lí triệt tiêu cho các ℓ-dạng vi phân L^p p-điều hòa.

Từ các kết quả trên, chúng tôi đặt ra bài toán là xây dựng các định lí triệt tiêu cho dạng vi phân p-điều hòa trên các đa tạp Riemann.

Mặt khác, như ta đã biết phương trình

$$\Delta_f u + h(u) = 0$$

có chứa nhiều lớp phương trình quan trọng trong phương trình vi phân và vật lí. Ví dụ, khi hàm $h(u) = bu + u^p$ với hằng số $b < 0$ và $p > 1$ và $f \equiv \text{const}$ thì phương trình trên trở thành một phương trình loại Yamabe như sau

$$\Delta u + bu + u^p = 0.$$

Bidaut-Véron và Véron nghiên cứu phương trình này trên đa tạp compact. Với một vài điều kiện thêm vào về tensor Ricci, số chiều và các miền của b, p, họ chỉ ra rằng phương trình loại Yamabe ở trên chỉ có nghiệm tầm thường. Khi đa tạp Riemann M là đầy đủ, không compact, Brandolini-Rigoli-Setti xét phương trình loại Yamabe

$$\Delta u + a(x)u + A(x)u^p = 0,$$

ở đây $a(x)$ và $A(x)$ là các hàm liên tục trên M và $p > 1$. Khi $A(x) < 0$ tại mọi nơi, họ chứng minh rằng phương trình trên không có nghiệm bị chặn dương thỏa mãn các điều kiện khả tích nào đó. Tổng quát hơn của phương trình Yamabe là phương trình Lichnerowicz Einstein-trường vô hướng, phương trình xuất hiện từ phương trình ràng buộc Halmiton cho hệ Einstein-trường vô hướng trong thuyết tương đối rộng. Khi đa tạp M có số chiều $n \geqslant 3$, phương trình Lichnerowicz Einstein-trường vô hướng có dạng như sau

$$\Delta u + bu + Au^p + Bu^{-q} = 0, \tag{0.1}$$

ở đó b, A, B là các hàm trơn và $p = (n+2)/(n-2)$ và $q = -(3n-2)/(n-2)$. Trong khi đó, trên đa tạp 2 chiều, phương trình Lichnerowicz Einstein-trường vô hướng có dạng như sau

$$\Delta u + Ae^{2u} + Be^{-2u} + D = 0.$$

Mặt khác, L. Ma và J. C. Wei nghiên cứu tính ổn định và nghiệm bội của phương trình Lichnerowicz Einstein-trường vô hướng trên đa tạp Riemann compact. Nếu $n \geq 5$, họ chứng minh rằng có ít nhất hai nghiệm dương hoặc có một nghiệm dương duy nhất dựa theo tính chất cưỡng của một dạng toàn phương xác định bởi nghiệm nhỏ nhất thu được bằng phương pháp đơn điệu. Y. Li và X. R. Zhu cũng nghiên cứu phương trình Lichnerowicz dạng đơn giản và thu được ước lượng gradient tương ứng. Gần đây, L. Zhao và Song-Zhao xét phương trình Lichnerowicz tổng quát

$$\Delta_f u + bu + Au^p + Bu^{-q} = 0,$$

ở đó b, A, B là các hàm trơn trên không gian độ đo metric trơn $(M, g, e^{-f}dv)$ và $p \geq 0, q \geq 0$. Họ thu được một vài ước lượng gradient cho nghiệm dương u và chứng minh một vài bất đẳng thức dạng Harnack.

Mặt khác, sự tồn tại nghiệm của phương trình p-Laplace tổng quát $\Delta_p v + h(v) = 0$ được nghiên cứu bởi M. Troyanov và P. Tolksdorf. Đối với phương trình thuần nhất, B. Kotschwar và L. Ni thiết lập được một ước lượng gradient địa phương cho các hàm p-điều hòa với giả thiết độ cong nhát cắt bị chặn dưới và họ kết luận rằng mọi hàm p-điều hòa dương phải là hằng nếu đa tạp không compact, đầy đủ, có độ cong nhát cắt không âm. Sau đó, X. D. Wang và L. Zhang nghiên cứu các hàm p-điều hòa và ước lượng gradient địa phương và bất đẳng thức Harnack với hằng số chỉ phụ thuộc vào cận dưới của độ cong Ricci, chiều của đa tạp và bán kính của quả cầu mà hàm số xác định. Họ cũng thu được một kết quả như sau: Nếu u là một hàm p-điều hòa dương bị chặn trên hoặc dưới trên một đa tạp Riemann đầy đủ với tensor Ricci không âm thì u là hằng số.

Gần đây, S. C. Chang, J. T. Chen và S. W. Wei thu được một định lí Liouville cho hàm p-điều hòa yếu với p-năng lượng hữu hạn trên một đa tạp không compact đầy đủ M mà thỏa mãn một bất đẳng thức Poincaré có trọng và điều kiện về độ cong. Sau đó, sử dụng một phương pháp khác, N. T. Dũng và các tác giả đã cải tiến định lí Liouville được đưa ra bởi S. C. Chang. Năm 2019, L. Zhao xét câu hỏi tương tự trên không gian độ đo metric trơn.

Từ đó, chúng tôi đặt ra bài toán là nghiên cứu định lí Liouville cho phương trình elliptic không tuyến tính trên đa tạp Riemann.

Như chúng ta biết ước lượng gradient là một công cụ quan trọng trong giải tích hình học và được sử dụng để thu được các định lí Liouville và các bất đẳng thức Harnack cho nghiệm dương của các phương trình không tuyến tính trên đa tạp Riemann. Ước lượng gradient Cheng-Yau địa phương khẳng định nếu M là một đa tạp Riemann đầy đủ n chiều với $Ric \geq -(n-1)\kappa$ với $\kappa \geq 0$ nào đó và $u : B(o, R) \subset M \to \mathbb{R}$ điều hòa và dương thì tồn tại một hằng số c_n chỉ phụ thuộc vào n sao cho

$$\sup_{B(o,R/2)} \frac{|\nabla u|}{u} \leq c_n \frac{1+\sqrt{\kappa}R}{R}. \tag{0.2}$$

Sau đó, ước lượng Cheng-Yau được mở rộng và tổng quát bởi nhiều nhà toán học. N. T. Dũng và N. D. Đạt xét $F(u) = \lambda u^{p-1}$ và nghiên cứu ước lượng gradient cho p-hàm riêng có trọng của toán tử $\Delta_{p,f}$. Sau đó, L. F. Wang ước lượng giá trị riêng của toán tử p-Laplace có trọng. Y. Wang, J. Yang và W. Chen thiết lập các ước lượng gradient và các công thức entropy cho phương trình p-nhiệt có trọng. Sau đó, N.T. Dũng và C. J. Sung nghiên cứu một vài tính chất Liouville cho ℓ-dạng vi phân p-điều hòa có trọng trên không gian độ đo metric trơn với các bất đẳng thức Poincaré và Sobolev.

Trong hướng nghiên cứu khác, các ước lượng gradient được tổng quát hóa lên đa tạp với điều kiện độ cong Ricci tích phân. Chẳng hạn, C. Rose nghiên cứu chặn trên của nhân nhiệt trên đa tạp Riemann với tích phân độ cong Ricci bị chặn đều địa phương. X. R. Olivé sử dụng độ cong Ricci tích phân để chỉ ra ước lượng gradient Li-Yau trên một đa tạp Riemann compact với điều kiện biên Neumann. Chúng ta cũng lưu ý rằng các ước lượng gradient Li-Yau cho phương trình nhiệt tuyến tính trên đa tạp không compact đầy đủ được chỉ ra bởi Q. S. Zhang và M. Zhu. Sau đó, các kết quả này được tổng quát bởi W. Wang cho phương trình nhiệt không tuyến tính.

Do vậy, chúng tôi đặt ra bài toán nghiên cứu ước lượng gradient cho phương trình p-Laplace có trọng trên đa tạp Riemann.

Từ những lí do như trên, chúng tôi lựa chọn đề tài "***Một vài khía cạnh của toán tử p-Laplace trên các đa tạp Riemann***" để tập trung nghiên cứu vào các định lí triệt tiêu cho dạng vi phân p-điều hòa, cũng như định lí Liouville cho phương trình elliptic không tuyến tính và nghiên cứu ước lượng gradient cho phương trình p-Laplace có trọng trên đa tạp Riemann.

2. Mục đích nghiên cứu

Mục đích đầu tiên của luận án là khảo sát các tính chất triệt tiêu của không gian các dạng vi phân p-điều hòa với năng lượng L^Q hữu hạn. Cụ thể, luận án sẽ đưa ra các điều kiện đủ về độ cong của đa tạp Riemann M sao cho các dạng vi phân p-điều hòa trên M là triệt tiêu.

Tiếp theo, luận án nghiên cứu định lí Liouville cho phương trình elliptic trên không gian độ đo metric trơn. Cụ thể, luận án sẽ đưa ra định lí Liouville cho phương trình sau

$$\Delta_{p,f} v + h(v) = 0$$

trên không gian độ đo metric trơn, ở đó $h(v)$ là một hàm khả vi trên M và thỏa mãn $h'(v) \leq 0$.

Cuối cùng, luận án đưa ra ước lượng gradient cho phương trình p-Laplace có trọng trên đa tạp Riemann. Cụ thể, luận án đưa ra các ước lượng gradient địa phương cho nghiệm dương của phương trình sau

$$\Delta_{p,f} u + F(u) = 0$$

trên không gian độ đo metric trơn không compact, trong đó F là một hàm khả vi, $F(u) \geq 0$ khi $u \geq 0$. Từ đó, luận án đưa ra các định lí Liouville và các ước lượng gradient địa phương cho một số phương trình đặc biệt.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu của luận án là tính triệt tiêu của các dạng vi phân p-điều hòa trên các đa tạp Riemann, định lí Liouville và ước lượng gradient cho phương trình p-Laplace có trọng.

4. Phương pháp nghiên cứu

Chúng tôi dùng phương pháp của giải tích hình học, phương trình đạo hàm riêng, giải tích phức và giải tích hàm để giải quyết các bài toán đã đặt ra trong luận án. Đặc biệt, chúng tôi sử dụng các bất đẳng thức Sobolev, bất đẳng thức Poincaré và kĩ thuật Bochner để ước lượng một vài đại lượng giải tích liên quan đến các dạng vi phân p-điều hòa. Hơn nữa, một vài kết quả trong hình học vi phân cũng rất hữu dụng trong các khảo sát. Cụ thể, chúng tôi sẽ sử dụng các kĩ thuật sau:

- Sử dụng kĩ thuật Bochner để ước lượng các đạo hàm bậc cao của các hàm p-điều hòa có trọng, các dạng vi phân p-điều hòa có trọng theo các đạo hàm cấp thấp hơn. Sau đó, chúng tôi chuyển các điều kiện hình học liên quan đến độ cong Ricci, Bakry-Émery thành các điều kiện giải tích và đại số để sử dụng công cụ giải tích ước lượng, giải quyết bài toán.

- Sử dụng bất đẳng thức Sobolev, bất đẳng thức Poincaré và các ước lượng độ cong đã biết để nghiên cứu tính chất của các dạng vi phân p-điều hòa.

- Nghiên cứu và chứng minh các ước lượng độ cong mới, sử dụng các phương pháp lặp Moser để chứng minh các ước lượng địa phương và toàn cục cho nghiệm dương của phương trình p-Laplace có trọng.

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn

Luận án đưa ra được những kết quả mới về tính triệt tiêu của các dạng vi phân p-điều hòa trên đa tạp Riemann, đưa ra định lí Liouville cho phương trình elliptic trên đa tạp Riemann và đưa ra ước lượng gradient cho phương trình p-Laplace có trọng trên đa tạp Riemann.

Luận án cũng là tài liệu tham khảo hữu ích cho sinh viên, học viên cao học và nghiên cứu sinh theo hướng nghiên cứu này.

6. Cấu trúc luận án

Cấu trúc của luận án bao gồm bốn chương. Chương 1 trình bày tổng quan các kết quả đã có trước đó và giới thiệu các kết quả đạt được của luận án. Ba chương còn lại trình bày chi tiết cho các kết quả mới của luận án.

Chương 1. Tổng quan.

Chương 2. Tính triệt tiêu của các dạng vi phân p-điều hòa trên các đa tạp Riemann.

Chương 3. Định lí Liouville cho phương trình elliptic trên các đa tạp Riemann.

Chương 4. Ước lượng gradient cho phương trình p-Laplace có trọng trên các đa tạp Riemann.

Luận án được viết dựa trên 04 bài báo đã được đăng.

Chương 1

TỔNG QUAN

Trong chương này, chúng tôi sẽ tóm tắt một vài kết quả trước đó và các kết quả mới mà chúng tôi thu được ở từng bài toán.

1.1 Tính triệt tiêu của các dạng vi phân p-điều hòa trên các đa tạp Riemann

Năm 2020, H. Lin đã sử dụng tính compact của đa tạp để chứng minh một định lí về tính triệt tiêu của dạng vi phân điều hòa. Một câu hỏi tự nhiên được đặt ra là: Có một kết quả tương tự như trên cho dạng vi phân p-điều hòa trong trường hợp M là đa tạp không compact hay không? Chúng tôi đưa ra được một kết quả tổng quát hơn cho dạng vi phân p-điều hòa trong trường hợp M là đa tạp không compact mà không kèm theo điều kiện độ cong vô hướng dương như sau.

Định lí 1.1.2. *Cho $(M^n, g)(n \geq 4)$ là một đa tạp Riemann được định hướng, không compact, đầy đủ, thỏa mãn một bất đẳng thức Poincaré có trọng với hàm trọng dương $\rho(x)$. Giả sử*

$$\sqrt{\frac{n^2-n-2}{n^2-n}}|Z| - \frac{n^2-n-2}{n^2-n}R \leq C\rho(x) \tag{1.1}$$

với hằng số $C = C(p, n, \ell, Q) \in \left(0, \frac{8(Q-1)+4B_p(p-1)^2}{Q^2}\right)$ $(2 \leq \ell \leq n-2, Q \geq p \geq 2)$. Khi đó, mọi ℓ-dạng vi phân p-điều hòa ω trên M thỏa mãn $\liminf\limits_{r\to\infty} \frac{1}{r^2} \int\limits_{B_{x_0}(r)} |\omega|^Q = 0$ đều có chuẩn là hằng. Đặc biệt, $H^{p,\ell}(L^Q(M)) = \{0\}$ ở đó

$$H^{p,\ell}(L^Q(M)) = \left\{\ell\text{-dạng vi phân p-điều hòa } \omega \text{ sao cho } \int_M |\omega|^Q < \infty\right\}.$$

Ở đây, R kí hiệu độ cong vô hướng của M và hằng số B_p xuất hiện trong bất đẳng thức Kato ở Bổ đề 2.2.2.

Nhắc lại rằng: Ta nói đa tạp Riemann M thỏa mãn một bất đẳng thức Poincaré có trọng với hàm trọng $\rho(x)$ nếu

$$\int_M \rho(x)\psi^2(x) \leq \int_M |\nabla\psi|^2(x) \tag{1.2}$$

đúng cho mọi hàm trơn $\psi \in C_0^\infty(M)$ có giá compact trong M, ở đó $\rho(x)$ được giả sử là một hàm không âm khác tầm thường trên M.

Nhận xét 1.1.3. *Chúng ta nhận thấy điều kiện về độ cong trong định lí trên là tổng quát hơn điều kiện về độ cong trong kết quả trước đó của H. Lin.*

Nhận xét 1.1.4. *Trong định lí trên nếu thay $p = 2$ thì chúng ta sẽ có ngay một kết quả triệt tiêu cho dạng vi phân điều hòa.*

Nhận xét 1.1.5. *Nếu giá trị riêng thứ nhất $\lambda_1(M) > 0$ thì bằng cách thay hàm $\rho(x) = \lambda_1(M)$, chúng ta thu được một kết quả triệt tiêu cho dạng vi phân p-điều hòa.*

Khi đa tạp M là phẳng bảo giác địa phương, có nhiều kết quả triệt tiêu cho các ℓ-dạng vi phân điều hòa và ℓ-dạng vi phân p-điều hòa. H. Lin đã chứng minh các định lí triệt tiêu và hữu hạn cho các 1-dạng vi phân L^2 điều hòa trên một đa tạp Riemann phẳng bảo giác địa phương nếu nó thỏa mãn điều kiện tích phân của tensor Ricci vết không. Kết quả tiếp theo là một định lí triệt tiêu trên đa tạp Riemann phẳng bảo giác địa phương với điều kiện độ cong tại từng điểm.

Định lí 1.1.4. *Cho $(M^n, g)(n \geq 4)$ là một đa tạp Riemann phẳng bảo giác địa phương, không compact, đầy đủ, với độ cong vô hướng $R > 0$. Giả sử M thỏa mãn bất đẳng thức Poincaré có trọng (1.2) với hàm trọng dương $\rho(x)$. Giả sử rằng*

$$\frac{a}{R}\left(|E|^2 - b^2R^2\right) \leq C\rho(x) \tag{1.3}$$

với hằng số $C = C(p, n, \ell, Q) \in \left(0, \frac{4}{Q^2}\left[Q - 1 + B_p(p-1)^2\right]\right)$ $(2 \leq \ell \leq n-2, \ell \neq \frac{n}{2}, Q \geq p \geq 2)$ và $a = \frac{(n-1)(n-2\ell)^2}{2(n-2)^2}$, $b = \frac{n-2}{(n-1)|n-2\ell|}\sqrt{\frac{\ell(n-\ell)}{n}}$. Khi đó, mọi ℓ-dạng vi phân p-điều hòa ω trên M thỏa mãn $\liminf\limits_{r\to\infty} \frac{1}{r^2} \int\limits_{B_{x_0}(r)} |\omega|^Q = 0$ đều có chuẩn hằng. Đặc biệt, $H^{p,\ell}(L^Q(M)) = \{0\}$.

Nhận xét 1.1.7. *Trong định lí trên nếu thay $p = 2$ thì chúng ta sẽ có ngay một kết quả triệt tiêu cho dạng vi phân điều hòa.*

Nhận xét 1.1.8. *Bằng cách thay $\rho(x)$ trong định lí trên bằng giá trị riêng thứ nhất $\lambda_1(M) > 0$, chúng ta thu được một hệ quả về tính triệt tiêu cho dạng vi phân p-điều hòa.*

Năm 2019, H. Lin chứng minh một kết quả triệt tiêu cho ℓ-dạng vi phân điều hòa trên một đa tạp Riemann không compact, đầy đủ với điều kiện của tensor Ricci vết không E và tensor độ cong Weyl W. Một câu hỏi tự nhiên là: Kết quả này còn đúng cho ℓ-dạng vi phân p-điều hòa hay không? Định lí tiếp theo sẽ cho chúng ta câu trả lời.

Định lí 1.1.6. *Cho $(M^n, g)(n \geq 4)$ là một đa tạp Riemann không compact, đầy đủ, thỏa mãn bất đẳng thức Poincaré có trọng (1.2) với hàm trọng dương $\rho(x)$ và độ cong vô hướng $R \geq 0$. Giả sử*

$$|W|(x) + a_\ell|E|(x) \leq C_\ell\rho(x) \tag{1.4}$$

với hằng số $0 < C_\ell < \frac{8(p-1+B_p(p-1)^2)}{\ell(\ell-1)p^2}\sqrt{\frac{n^2-n}{n^2-n-2}}$ *ở đó* $2 \leq \ell \leq n-2$, $\ell \neq \frac{n}{2}$, $p \geq 2$ *và* $a_\ell = \frac{2(n-1)|n-2\ell|}{(\ell-1)\sqrt{(n+1)(n-2)^3}}$. *Khi đó, mọi* ℓ*-dạng vi phân* p*-điều hòa* ω *trên* M *thỏa mãn* $\liminf_{r\to\infty} \frac{1}{r^2} \int_{B_{x_0}(r)} |\omega|^p = 0$ *đều triệt tiêu. Đặc biệt,* $H^{p,\ell}(L^p(M)) = \{0\}$.

Nhận xét 1.1.9. *Định lí này sẽ quay về kết quả của H. Lin ở trên khi* $p = 2$.

Trong trường hợp $n = 2m$ và $\ell = \frac{n}{2} = m$, chúng tôi thu được một kết quả tương tự như sau.

Định lí 1.1.7. *Cho* $(M^{2m}, g)(m \geq 2)$ *là một đa tạp Riemann không compact, đầy đủ, thỏa mãn bất đẳng thức Poincaré có trọng (1.2) với hàm trọng dương* $\rho(x)$ *và độ cong vô hướng* $R \geq 0$. *Giả sử*

$$|W|(x) \leq C_m \rho(x)$$

với hằng số

$$0 < C_m < \frac{8(p-1+B_p(p-1)^2)}{m(m-1)p^2}\sqrt{\frac{m(2m-1)}{(2m+1)(m-1)}} \text{ và } p \geq 2.$$

Khi đó, mọi m*-dạng vi phân* p*-điều hòa* ω *trên* M *thỏa mãn* $\liminf_{r\to\infty} \frac{1}{r^2} \int_{B_{x_0}(r)} |\omega|^p = 0$ *là* m*-dạng vi phân song song. Đặc biệt,* $H^{p,m}(L^p(M)) = \{0\}$.

Nhận xét 1.1.10. *Khi* $p = 2$, *định lí trên cho ta một kết quả triệt tiêu cho dạng vi phân điều hòa, tương tự như kết quả của H. Lin.*

Bằng cách thay thế điều kiện độ cong bởi điều kiện độ cong ℓ-không âm, trong bài báo năm 2019, H. Lin thu được một định lí triệt tiêu. Tổng quát kết quả trên cho dạng vi phân p-điều hòa, chúng tôi thu được một kết quả như sau.

Định lí 1.1.9. *Cho* $(M^n, g)(n \geq 3)$ *là một đa tạp Riemann không compact, đầy đủ, với tensor độ cong thuần túy và độ cong* ℓ*-không âm,* $1 \leq \ell \leq n-1$. *Khi đó, mọi* ℓ*-dạng vi phân* p*-điều hòa* ω *trên* M *thỏa mãn* $\liminf_{r\to\infty} \frac{1}{r^2} \int_{B_{x_0}(r)} |\omega|^q = 0$, $(q \geq p \geq 2)$ *đều có chuẩn hằng. Nếu giả sử thêm* $\liminf_{r\to\infty} \frac{1}{r} \int_{B_{x_0}(r)} |\omega|^q = 0$ *thì* ω *triệt tiêu. Đặc biệt,* $H^{p,\ell}(L^q(M)) = \{0\}$.

Nhận xét 1.1.13. *Khi* $p = 2$ *thì từ định lí trên chúng ta thu được một kết quả về tính triệt tiêu của dạng vi phân điều hòa tương tự như kết quả trên của H. Lin.*

Ngoài ra, khi M có độ cong vô hướng không âm và bất biến Yamabe $\mathcal{Q}(M, g)$ dương, H. Lin đã chứng minh một kết quả triệt tiêu cho ℓ-dạng vi phân L^2 điều hòa. Từ đó, chúng tôi tập trung nghiên cứu ℓ-dạng vi phân L^Q p-điều hòa và thu được kết quả mở rộng như sau.

Định lí 1.1.11. *Cho* $(M^n, g)(n \geq 4)$ *là một đa tạp Riemann không compact, đầy đủ,* *với $R \geq 0$ và $\mathcal{Q}(M,g) > 0$. Giả sử*

$$\left(\int\limits_M |W|^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{2}{n}} + a_\ell \left(\int\limits_M |E|^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{2}{n}} < c_\ell \mathcal{Q}(M,g) \tag{1.5}$$

ở đó $c_\ell = \frac{2}{\ell(\ell-1)}\sqrt{\frac{n^2-n}{n^2-n-2}} \min\left\{\frac{4Q-4+4B_p(p-1)^2}{Q^2}, \frac{4\ell(n-\ell)}{n^2-2n}\right\}$ $(2 \leq \ell \leq n-2, Q \geq p \geq 2)$ *và* $a_\ell = \frac{2(n-1)|n-2\ell|}{(\ell-1)\sqrt{(n+1)(n-2)^3}}$*. Khi đó, mọi ℓ-dạng vi phân p-điều hòa ω trên M thỏa mãn* $\liminf\limits_{r\to\infty} \frac{1}{r^2} \int\limits_{B_{x_0}(r)} |\omega|^Q = 0$ *đều triệt tiêu. Đặc biệt, $H^{p,\ell}(L^Q(M)) = \{0\}$.*

Nhận xét 1.1.15. *Khi $Q = p = 2$ thì định lí này quay về kết quả trên của H. Lin.*

1.2 Tính triệt tiêu của 1-dạng vi phân p-điều hòa trên các đa tạp con thực hoàn toàn trong dạng không gian phức

Trong phần này, chúng tôi xét trường hợp đa tạp con thực hoàn toàn trong dạng không gian phức. Trong bài báo của mình, D. V. Cường - N. T. Dũng - N. T. K. Sơn thu được một kết quả triệt tiêu cho các 1-dạng vi phân điều hòa trên các đa tạp con cực tiểu thực hoàn toàn của các dạng không gian phức. Xuất phát từ các kết quả trên, luận án nghiên cứu một lớp các 1-dạng vi phân p-điều hòa trên đa tạp con cực tiểu hoặc không cực tiểu thực hoàn toàn được nhúng trong một dạng không gian phức. Khi đa tạp con là cực tiểu, chúng tôi thu được kết quả như sau.

Định lí 1.2.2. *Cho M là một đa tạp con cực tiểu thực hoàn toàn không compact, đầy đủ, n chiều $(n \geq 3)$ được nhúng trong $\widetilde{M}_n(c)$, ở đó $c \in \{-1, 0\}$ và A là dạng cơ bản thứ hai của M. Nếu một trong các giả thiết sau đúng*

(i) $c = -1$ *và* $\|A\|_n < \frac{2}{Q}\sqrt{\frac{Q-1+B_p(p-1)^2}{C} - \frac{Q^2}{(n-1)C}}$;

(ii) $c = 0$ *và* $\|A\|_n < \frac{2}{Q}\sqrt{\frac{Q-1+B_p(p-1)^2}{C}}$

thì mọi 1-dạng vi phân L^Q p-điều hòa trên M đều triệt tiêu, với $Q \geq p \geq 2$. Ở đây, C kí hiệu hằng số Sobolev trong Bổ đề 2.5.3, hằng số B_p trong Bổ đề 2.5.2 và $\|A\|_n = \left(\int_M |A|^n\right)^{\frac{1}{n}}$.

Nhận xét 1.2.2. *Chúng ta nhận thấy định lí trên là tổng quát của kết quả của D. V. Cường - N. T. Dũng - N. T. K. Sơn.*

Chúng ta lưu ý rằng trong trường hợp đa tạp con không cực tiểu, chúng ta cần thêm một giả thiết về cận dưới của $\lambda_1(M)$. Thực tế, ta có kết quả như sau.

Định lí 1.2.3. *Cho M là một đa tạp con không cực tiểu thực hoàn toàn không compact, đầy đủ, n chiều, được nhúng trong $\widetilde{M}_n(c)$, ở đó $c \in \{-1, 0\}$ và A là dạng cơ bản thứ hai của M. Nếu một trong các giả thiết sau thỏa mãn*

(i) $c = -1$, $\lambda_1(M) > \frac{(n-1)Q^2}{16[Q-1+B_p(p-1)^2]}$ *và*

$$\|A\|_n < \frac{2}{Q}\sqrt{\frac{Q-1+B_p(p-1)^2}{(n+1)C_s} - \frac{(n-1)Q^2}{16(n+1)C_s\lambda_1(M)}};$$

(ii) $c = 0$ *và* $\|A\|_n < \min\left\{\frac{2}{Q}\sqrt{\frac{Q-1+B_p(p-1)^2}{(n+1)C_s}}, \frac{1}{\sqrt{\alpha C}}\right\}$, *ở đó* $\alpha > 1, C$ *là hằng số Sobolev trong Bổ đề 2.5.3, hằng số* B_p *trong Bổ đề 2.5.2 và* $C_s := \frac{\alpha C}{\alpha - 1}$

thì mọi 1*-dạng vi phân* L^Q p*-điều hòa trên* M *đều triệt tiêu, với* $Q \geq p \geq 2$.

Nhận xét 1.2.3. *Khi* $p = 2$*, chúng ta thu được một định lí triệt tiêu cho 1-dạng vi phân điều hòa trên đa tạp con không cực tiểu. Chúng tôi cũng nhấn mạnh là kết quả này không được phát biểu trong bài báo của D. V. Cường - N. T. Dũng - N. T. K. Sơn.*

Mặt khác, Choi-Seo xét một đa tạp con thực hoàn toàn không compact, đầy đủ trong một không gian xạ ảnh phức thỏa mãn chuẩn L^n của dạng cơ bản thứ hai vết không là đủ nhỏ. Họ thu được một định lí triệt tiêu cho các 1-dạng vi phân điều hòa. Từ đó, chúng tôi tập trung nghiên cứu 1-dạng vi phân p-điều hòa và thu được một kết quả tổng quát hơn như sau.

Định lí 1.2.5. *Cho* M *là một đa tạp con thực hoàn toàn không compact, đầy đủ,* n *chiều* ($n \geq 3$) *trong* $\mathbb{C}P^m$*. Gọi* Φ *là dạng cơ bản thứ hai vết không, xác định bởi* $\Phi = A - Hg$*, ở đó* A, H *và* g *lần lượt là dạng cơ bản thứ hai, véc tơ độ cong trung bình và metric cảm sinh trên* M*. Khi đó với mọi* $p \geq 2$*, tồn tại* Q, δ *phụ thuộc vào* p, n *sao cho nếu* $\|\Phi\|_n < \delta$ *thì mọi 1-dạng vi phân* L^Q p*-điều hòa trên* M *đều triệt tiêu.*

Nhận xét 1.2.4. *Khi* $p = 2$*, chúng ta có ngay một kết quả triệt tiêu cho 1-dạng vi phân điều hòa. Hơn nữa, hệ quả này có thể coi là một cải tiến của Định lí 3.3 trong bài báo của Choi-Seo, đặc biệt khi* $n \leq 7$.

1.3 Định lí Liouville cho phương trình elliptic trên các đa tạp Riemann

Năm 2019, L. Zhao thu được một định lí Liouville trên không gian độ đo metric trơn. Từ kết quả ở trên và tính chất Liouville thu được bởi N. T. Dũng - N. N. Khanh - Q. A. Ngô, chúng tôi xét phương trình sau

$$\Delta_{p,f} v + h(v) = 0$$

trên không gian độ đo metric trơn, ở đó $h(v)$ là một hàm khả vi và thỏa mãn $h'(v) \leq 0$. Nhắc lại, nếu $h(v) \equiv 0$, thì v được gọi là p-điều hòa có trọng. Bằng cách sử dụng phương pháp trong bài báo của Dung-Seo và Dung-Sung, chúng tôi thu được các kết quả mới như sau.

Định lí 1.3.2. *Cho $(M^n, g, e^{-f}d\nu)(n \geq 2)$ là một không gian độ đo metric trơn không compact và đầy đủ. Giả sử độ cong Bakry-Émery bị chặn dưới*

$$\mathrm{Ric}_f \geq -a\rho,$$

với hằng số nào đó $a \in \mathbb{R}$, ở đây ρ thỏa mãn bất đẳng thức Poincaré có trọng

$$\int \rho\varphi^2 e^{-f} \leq \int |\nabla\varphi|^2 e^{-f}, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(M).$$

Với $p \geq 1$ và $\alpha \in (0,1)$, giả sử $v \in C^{1,\alpha}_{loc}(M) \cap W^{2,2}_{loc}(M)$ là một nghiệm dương của phương trình

$$\Delta_{p,f} v + h(v) = 0,$$

ở đó $h(v)$ là một hàm khả vi và thỏa mãn $h'(v) \leq 0$. Nếu hằng số a thỏa mãn

$$a < \frac{4(p-1)}{p^2}$$

và nếu $|dv| \in L^{2\beta}(M)$ với

$$\frac{p}{2} \leq \beta < \frac{1}{a}\left(1 + \sqrt{1-a}\right),$$

thì hàm v là hằng.

Nhận xét 1.3.2. *Để ý rằng nếu $h(v) = cv^\sigma$ ở đó $c \leq 0, \sigma \geq 0$ thì phương trình ở trên trở thành $\Delta_{p,f} v + cv^\sigma = 0$. Đây là phương trình đã được nghiên cứu bởi L. Zhao. Hơn nữa, $h'(v) \leq 0$. Đặt $\beta = \frac{p}{2}$, chúng tôi nhấn mạnh rằng trong trường hợp này, kết quả của chúng tôi là tốt hơn kết quả của L. Zhao. Thật vậy, từ $\mathrm{Ric}_f^m \geq -a\rho$ kéo theo $\mathrm{Ric}_f \geq -a\rho$, điều kiện về độ cong của chúng tôi là yếu hơn so với giả thiết của L. Zhao. Miền của a trong kết quả của chúng tôi rộng hơn miền của a trong giả thiết của L. Zhao. Hơn nữa, chúng tôi không cần điều khiển giá trị của p như trong bài báo của L. Zhao.*

1.4 Ước lượng gradient cho phương trình p-Laplace có trọng trên các đa tạp Riemann

Năm 2018, L. Zhao và D. Yang xét phương trình p-Laplace Lichnerowicz

$$\Delta_{p,f} u + cu^\sigma = 0$$

trên không gian độ đo metric trơn không compact, với $c \geq 0, p > 1, \sigma \leq p-1$ và thu được một ước lượng gradient địa phương cho nghiệm dương. Từ đó, các tác giả thu được một tính chất Liouville và một bất đẳng thức Harnack tương ứng. Mặt khác, S. B. Hou xét nghiệm dương bị chặn của phương trình Allen-Cahn

$$\Delta u + (1-u^2)u = 0$$

trên đa tạp Riemann đầy đủ và không compact. Từ đó, tác giả thu được các ước lượng gradient cho các nghiệm này. Như là một hệ quả, S. H. Hou thu được một định lí Liouville trên các đa tạp với độ cong Ricci không âm.

Từ các kết quả ở trên, luận án đưa ra các ước lượng gradient địa phương cho nghiệm dương của phương trình sau

$$\Delta_{p,f} u + F(u) = 0 \tag{1.6}$$

trên không gian độ đo metric trơn không compact. Trong phần này, chúng ta giả sử F là một hàm khả vi, $F(u) \geq 0$ khi $u \geq 0$. Đặt $h(v) = (p-1)^{p-1} e^{-v} F(e^{\frac{v}{p-1}})$, chúng ta giả sử thêm $h'(v) \leq a := a(p)$ với hằng số nào đó $a \geq 0$, ở đó $a = 0$ nếu $p \neq 2$. Chúng ta nói *một bất đẳng thức Sobolev có trọng* đúng trên M nếu tồn tại các hằng số dương C_1, C_2, C_3, chỉ phụ thuộc vào m, sao cho với mọi quả cầu $B_o(R) \subset M$, mọi hàm $\phi \in C_0^\infty(B_o(R))$ ta có

$$\left(\int_{B_o(R)} |\phi|^{\frac{2m}{m-2}} e^{-f} d\mu \right)^{\frac{m-2}{m}} \leq C_1 e^{C_2(1+\sqrt{K}R)} V^{-C_3} \int_{B_o(R)} (R^2 |\nabla \phi|^2 + \phi^2) e^{-f} d\mu,$$

ở đó V là thể tích của quả cầu trắc địa $B_o(R)$.

Từ đó, chúng tôi thu được một ước lượng gradient như sau.

Định lí 1.4.2. *Cho $(M, g, e^{-f} d\mu)$ là một không gian độ đo metric trơn mà trên đó có bất đẳng thức Sobolev có trọng. Giả sử u là một nghiệm dương của phương trình (1.6), trên quả cầu trắc địa $B_o(R) \subset M$ và $F(u) \geq 0$ khi $u \geq 0, h'(v) \leq a = a(p)$ với hằng số nào đó $a \geq 0$, ở đó $a = a(p) = 0$ nếu $p \neq 2$. Với bất kì $\eta > 0, q > \frac{n}{2}$, tồn tại $b > 0$ sao cho nếu $\|\mathrm{Ric}_-^K\|_{q,R} \leq \frac{1}{bR^2}$ và $k(q,1) \leq \frac{1}{b}$ thì tồn tại một hằng số $C_{p,m,V}$ chỉ phụ thuộc vào p, m và V sao cho*

$$\frac{|\nabla u|}{u} \leq C_{p,m,V} \frac{1 + \sqrt{K}R}{R} + \eta,$$

trên quả cầu trắc địa $B_o(\frac{R}{2})$. Hơn nữa, nếu $\|\mathrm{Ric}_-^K\|_{q,R} = 0$ thì

$$\frac{|\nabla u|}{u} \leq C_{p,m} \frac{1 + \sqrt{K}R}{R},$$

trên quả cầu trắc địa $B_o(\frac{R}{2})$ và $C(p,m)$ chỉ phụ thuộc vào p và m.

Nhận xét 1.4.1. *Bằng cách áp dụng hàm $F(u)$ cho trường hợp cụ thể, ta thu được các ước lượng gradient cho các phương trình được xét trong các bài báo của S. H. Hou và Zhao-Yang. Ngoài ra, nếu thay $F(u) = cu(1-u)$, với $c > 0$, chúng ta thu được một ước lượng gradient mới cho phương trình Fisher-KPP. Hơn nữa, từ định lí trên, chúng ta còn thu thêm được ước lượng gradient cho phương trình*

$$\Delta_f u + aulogu = 0, a \geq 0.$$

Chương 2

TÍNH TRIỆT TIÊU CỦA CÁC DẠNG VI PHÂN P-ĐIỀU HÒA TRÊN CÁC ĐA TẠP RIEMANN

Chương này sẽ trình bày các kết quả mới về tính triệt tiêu của các dạng vi phân p-điều hòa trên đa tạp Riemann. Chương này được viết dựa trên các bài báo [3] và [4] trong mục **Các công trình đã công bố liên quan đến luận án**. Trước hết, chúng tôi nhắc lại công thức Weitzenböck.

2.1 Công thức Weitzenböck

Công thức Weitzenböck cho dạng vi phân $\omega = \alpha_{i_1\dots i_\ell}\theta^{i_1}\wedge\cdots\wedge\theta^{i_\ell}$ như sau

$$\frac{1}{2}\Delta|\omega|^2 = |\nabla\omega|^2 + \langle\Delta\omega,\omega\rangle + F(\omega),$$

ở đó

$$\begin{aligned}F(\omega) =& \left\langle \sum_{j,k=1}^{n}\theta^k\wedge i(e_j)R(e_k,e_j)\omega,\omega\right\rangle\\ =&R_{ij}\langle i(e_i)\omega, i(e_j)\omega\rangle - \frac{1}{2}R_{ijkm}\langle i(e_j\wedge e_i)\omega, i(e_m\wedge e_k)\omega\rangle\\ =&\ell R_{ij}\alpha^{ii_2\dots.i_\ell}\alpha^j{}_{i_2\dots i_\ell} - \frac{\ell(\ell-1)}{2}R_{ijkm}\alpha^{iji_3\dots.i_\ell}\alpha^{km}{}_{i_3\dots i_\ell}.\end{aligned}$$

2.2 Tính chất triệt tiêu trên các đa tạp với bất đẳng thức Poincaré có trọng

Trong phần này, chúng tôi xét một đa tạp Riemann với bất đẳng thức Poincaré có trọng. Cụ thể, chúng tôi chứng minh các Định lí 1.1.2, Định lí 1.1.4, Định lí 1.1.6, Định lí 1.1.7 và nêu các hệ quả.

Để chứng minh các kết quả trên, chúng ta cần sử dụng 2 bổ đề sau.

Bổ đề 2.2.2 (Bất đẳng thức dạng Kato). *Với $p\ge 2,\ell\ge 1$, cho ω là một ℓ-dạng vi phân p-điều hòa trên một đa tạp Riemann đầy đủ, n chiều M. Khi đó ta có*

$$|\nabla(|\omega|^{p-2}\omega)|^2 \ge (B_p+1)|\nabla|\omega|^{p-1}|^2,$$

ở đó $B_p = \begin{cases} \frac{1}{\max\{\ell, n-\ell\}}, & \text{nếu } p = 2 \\ \frac{1}{(p-1)^2}.\min\{1, \frac{(p-1)^2}{n-1}\}, & \text{nếu } p > 2 \text{ và } \ell = 1 \\ 0, & \text{nếu } p > 2 \text{ và } 1 < \ell \leq n-1 \end{cases}$.

Bổ đề 2.2.3. *Với bất kì ℓ-dạng vi phân đóng ω và $\varphi \in \mathbf{C}^\infty(M)$, ta có*

$$|d(\varphi\omega)| = |d\varphi \wedge \omega| \leq |d\varphi|.|\omega|.$$

2.3 Tính chất triệt tiêu trên các đa tạp với tensor độ cong thuần túy

Trong phần này, chúng tôi xét một đa tạp Riemann với tensor độ cong thuần túy. Cụ thể, chúng tôi chứng minh Định lí 1.1.9 và nêu một hệ quả.

2.4 Tính chất triệt tiêu trên các đa tạp với bất biến Yamabe dương

Trong phần này, chúng tôi nghiên cứu ℓ-dạng vi phân p-điều hòa trên đa tạp Riemann với bất biến Yamabe dương. Cụ thể, chúng tôi chứng minh Định lí 1.1.11 và nêu các hệ quả.

2.5 Tính triệt tiêu của 1-dạng vi phân p-điều hòa trên các đa tạp con thực hoàn toàn trong dạng không gian phức

Trong phần này, chúng tôi xét trường hợp đa tạp con thực hoàn toàn trong dạng không gian phức. Cụ thể, chúng tôi chứng minh các Định lí 1.2.2, Định lí 1.2.3, Định lí 1.2.5 và nêu các hệ quả.

Để chứng minh các kết quả, chúng ta nhắc lại một số bổ đề sau.

Bổ đề 2.5.3. *Cho M^n là một đa tạp con đầy đủ được nhúng trong một đa tạp có độ cong không dương $N^{n+p}, n \geq 3$. Khi đó với bất kì $\varphi \in W_0^{1,2}(M)$, ta có*

$$\left(\int_M |\varphi|^{2n/(n-2)}\right)^{\frac{n-2}{n}} \leq C \int_M \left[|\nabla\varphi|^2 + |H|^2\varphi^2\right],$$

ở đó C là hằng số Sobolev chỉ phụ thuộc vào n và H kí hiệu véc tơ độ cong trung bình của M.

Bổ đề 2.5.5. *Cho M^n $(n \geq 3)$ là một đa tạp con thực hoàn toàn trong $\mathbb{C}P^m$. Khi đó, với bất kì $\varphi \in W_0^{1,2}(M)$, ta có*

$$\left(\int_M |\varphi|^{2n/(n-2)}\right)^{\frac{n-2}{n}} \leq C_s \left(\int_M |\nabla\varphi|^2 + n^2 \int_M (|H|^2 + 1)\varphi^2\right),$$

ở đây C_s là hằng số Sobolev chỉ phụ thuộc vào n và H là véc tơ độ cong trung bình được chuẩn hóa trên M.

Bổ đề 2.5.6. *Cho N là một đa tạp Riemann đơn liên, đầy đủ, $n-$chiều với độ cong nhát cắt K_N thỏa mãn $K_N \leq -a^2$ với một hằng số dương $a > 0$. Cho M là một đa tạp con không compact, đầy đủ, $m-$chiều với véc tơ độ cong trung bình H bị chặn trong N thỏa mãn $|H| \leq b < (m-1)a$. Khi đó*

$$\lambda_1(M) \geq \frac{[(m-1)a - b]^2}{4}.$$

Chương 3

ĐỊNH LÍ LIOUVILLE CHO PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC TRÊN CÁC ĐA TẠP RIEMANN

Chương 3 sẽ trình bày các kết quả mới về định lí Liouville cho phương trình elliptic trên đa tạp Riemann. Chương này được viết dựa trên bài báo [1] trong mục **Các công trình đã công bố liên quan đến luận án**.

3.1 Tính chất triệt tiêu cho nghiệm của phương trình loại Lichnerowicz p-Laplace

Trong mục này, chúng tôi sử dụng phương pháp trong bài báo của Dung-Sung và Dung-Seo để chứng minh Định lí 1.3.2.

3.2 Một số hệ quả

Bằng cách áp dụng Định lí 1.3.2 vào một số trường hợp đặc biệt, chúng ta thu được các hệ quả như sau.

Hệ quả 3.2.1. *Cho $(M^n, g, e^{-f}d\nu)(n \geq 2)$ là một không gian độ đo metric trơn không compact, đầy đủ. Giả sử độ cong Bakry-Émery bị chặn dưới*

$$\mathrm{Ric}_f \geq -a\rho,$$

với hằng số nào đó $a \in \mathbb{R}$, ở đó ρ thỏa mãn bất đẳng thức Poincaré có trọng

$$\int \rho\varphi^2 e^{-f} \leq \int |\nabla\varphi|^2 e^{-f}, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(M).$$

Với $p \geq 1$ và $\alpha \in (0,1)$, giả sử $v \in C^{1,\alpha}_{loc}(M) \cap W^{2,2}_{loc}(M)$ là một nghiệm dương của phương trình

$$\Delta_{p,f}v + bv + Av^p + Bv^{-q} = 0$$

ở đó $b \leq 0, A \leq 0, p \geq 1, B \geq 0, q \geq 0$ là các số thực. Nếu hằng số a thỏa mãn

$$a < \frac{4(p-1)}{p^2}$$

và nếu $|dv| \in L^{2\beta}(M)$ *với*

$$\frac{p}{2} \leq \beta < \frac{1}{a}\left(1 + \sqrt{1-a}\right),$$

thì hàm v *là hằng số.*

Hệ quả 3.2.2. *Cho* $(M^n, g, e^{-f}d\nu)(n \geq 2)$ *là một không gian độ đo metric trơn không compact, đầy đủ. Giả sử độ cong Bakry-Émery bị chặn dưới*

$$\mathrm{Ric}_f \geq -a\rho,$$

với hằng số nào đó $a \in \mathbb{R}$*, ở đó* ρ *thỏa mãn bất đẳng thức Poincaré có trọng*

$$\int \rho\varphi^2 e^{-f} \leq \int |\nabla\varphi|^2 e^{-f}, \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(M).$$

Với $p \geq 1$ *và* $\alpha \in (0,1)$*, giả sử* $v \in C^{1,\alpha}_{loc}(M) \cap W^{2,2}_{loc}(M)$ *là một nghiệm dương của phương trình*

$$\Delta_{p,f} v + Ae^{2v} + Be^{-2v} + D = 0$$

ở đó $A \leq 0, B \geq 0$ *và* D *là các số thực bất kì. Nếu hằng số* a *thỏa mãn*

$$a < \frac{4(p-1)}{p^2}$$

và $|dv| \in L^{2\beta}(M)$ *với*

$$\frac{p}{2} \leq \beta < \frac{1}{a}\left(1 + \sqrt{1-a}\right).$$

thì v *là hằng số.*

Chương 4

ƯỚC LƯỢNG GRADIENT CHO PHƯƠNG TRÌNH P-LAPLACE CÓ TRỌNG TRÊN CÁC ĐA TẠP RIEMANN

Chương 4 sẽ trình bày các kết quả mới về ước lượng gradient cho phương trình p-Laplace có trọng trên đa tạp Riemann. Chương này được viết dựa trên bài báo [2] trong mục **Các công trình đã công bố liên quan đến luận án**.

4.1 Ước lượng gradient cho phương trình p-Laplace có trọng

Trong mục này, chúng tôi chứng minh Định lí 1.4.2. Để chứng minh Định lí 1.4.2, chúng ta cần sử dụng toán tử tuyến tính hóa của toán tử p-Laplace có trọng. Khi đó ta cần sử dụng ba bổ đề sau.

Bổ đề 4.1.3. *Cho $(M, g, e^{-f}d\mu)$ là một không gian độ đo metric trơn và hàm $u \in \mathcal{C}^3(M)$. Khi đó, nếu $|\nabla u| \neq 0$ thì*

$$\mathcal{L}_f(|\nabla u|^p) = p|\nabla u|^{2p-4}\left(|\mathrm{Hess} u|_A^2 + \mathrm{Ric}_f(\nabla u, \nabla u)\right) + p|\nabla u|^{p-2}\left\langle \nabla u, \nabla\Delta_{p,f} u\right\rangle,$$

ở đó $|\mathrm{Hess} u|_A^2 = A^{ik}A^{jl}u_{ij}u_{kl}$ và A được xác định như trên.

Bổ đề 4.1.4. *Cho $v = (p-1)\log u, w = |\nabla v|^2$, và $\alpha = \min\left\{2(p-1), \frac{m(p-1)^2}{m-1}\right\}$, đặt*

$$h(v) = (p-1)^{p-1}e^{-v}F(e^{\frac{v}{p-1}}).$$

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}|\mathrm{Hess} v|_A^2 \geq & \frac{\alpha}{4}\frac{|\nabla w|^2}{w} + \frac{w^2}{m-1}(1 + hw^{\frac{-p}{2}})^2 \\ & + \frac{p-1}{m-1}(1 + hw^{\frac{-p}{2}})\left\langle \nabla v, \nabla w\right\rangle - \frac{(f_1 v_1)^2}{m-n}.\end{aligned}$$

Bổ đề 4.1.5 (Ước lượng $\mathbf{L^q}$-chuẩn). *Với giả thiết như trong Định lí 1.4.2, nếu $b_0 > 0$ đủ lớn thì tồn tại $d_1(p, m) > 0$ sao cho*

$$\| w \|_{L^{(b_0+p-1)\frac{m}{m-2}}(B_o(\frac{3}{4}R))} \leq d_1\frac{b_0^2}{R^2}V^{\frac{m-2}{m(b_0+p-1)}}.$$

4.2 Các định lí Liouville và ước lượng gradient địa phương

Trong mục này, chúng tôi áp dụng Định lí 1.4.2 trong một số trường hợp đặc biệt để thu được các hệ quả. Trước tiên, ta nhắc lại bổ đề sau.

Bổ đề 4.2.1. *Cho $(M, g, e^{-f}d\mu)$ là một không gian độ đo metric trơn n chiều. Giả sử $Ric_f^m \geq -(m-1)K$, ở đó K là một hằng số không âm, $m > n \geq 2$. Khi đó, tồn tại một hằng số C, chỉ phụ thuộc vào m, sao cho với mọi quả cầu $B_o(R) \subset M$, mọi hàm $\phi \in C_0^\infty(B_o(R))$ ta có*

$$\left(\int_{B_o(R)} |\phi|^{\frac{2m}{m-2}} e^{-f} d\mu\right)^{\frac{m-2}{m}} \leq e^{C(1+\sqrt{K}R)} V^{-\frac{2}{m}} \int_{B_o(R)} (R^2|\nabla\phi|^2 + \phi^2) e^{-f} d\mu,$$

ở đó V là thể tích của quả cầu trắc địa $B_o(R)$.

Hệ quả 4.2.2. *Cho $(M, g, e^{-f}d\mu)$ là một không gian độ đo metric trơn với $Ric_f^m \geq 0$. Nếu u là một nghiệm dương của phương trình $\Delta_{p,f}u + cu^\sigma = 0$ và xác định trên toàn bộ không gian thì u là hằng số.*

Hệ quả 4.2.3. *Cho $(M, g, e^{-f}d\mu)$ là một không gian độ đo metric trơn với $Ric_f^m \geq -(m-1)K$, K là một hằng số không âm. Nếu u là một nghiệm của phương trình*

$$\Delta_{p,f}u + u(1-u^2) = 0, \quad p \geq 2,$$

thỏa mãn $0 < u \leq 1$ trên quả cầu $B_o(R) \subset M$ thì

$$\frac{|\nabla u|}{u} \leq C_{p,m} \frac{1+\sqrt{K}R}{R}$$

trên quả cầu $B_o(\frac{R}{2})$, ở đó $C_{p,m}$ là một hằng số chỉ phụ thuộc vào p và m. Đặc biệt, khi $K = 0$, nếu $0 < u \leq 1$ trong M thì $u \equiv 1$ trên M.

Hệ quả 4.2.4. *Cho $(M, g, e^{-f}d\mu)$ là một không gian độ đo metric trơn với $Ric_f^m \geq -(m-1)K$, hằng số $K \geq 0$. Nếu u là một nghiệm dương của phương trình*

$$\Delta_{p,f}u + cu(1-u) = 0, \quad p \geq 2, c > 0,$$

trên quả cầu trắc địa $B_o(R) \subset M$, $u \leq 1$ trong M thì

$$\frac{|\nabla u|}{u} \leq C_{p,m} \frac{1+\sqrt{K}R}{R}$$

trên quả cầu trắc địa $B_o(\frac{R}{2})$, với $C_{p,m}$ chỉ phụ thuộc vào p và m. Khi $K = 0$ thì $u \equiv 1$ trên M.

Hệ quả 4.2.5. *Cho $(M, g, e^{-f}d\mu)$ là một không gian độ đo metric trơn với $Ric_f^m \geq -(m-1)K$, $K \geq 0$. Nếu $u \geq 1$ là một nghiệm của phương trình*

$$\Delta_f u + au\log u = 0, \quad a \geq 0, \tag{4.1}$$

trên quả cầu trắc địa $B_o(R) \subset M$ thì

$$\frac{|\nabla u|}{u} \leq C_{p,m} \frac{1 + \sqrt{K}R}{R}$$

trên quả cầu trắc địa $B_o(\frac{R}{2})$, với $C_{p,m}$ chỉ phụ thuộc vào p và m. Khi $K = 0$ và $u \geq 1$ trong M thì $u \equiv 1$ trong M.

Hệ quả 4.2.6. *Cho (M, g) là một đa tạp Riemann đầy đủ. Giả sử $u \geq 1$ là một nghiệm dương của phương trình*

$$\Delta_f u + a u \log u = 0, \quad a \geq 0,$$

trên quả cầu trắc địa $B_o(R) \subset M$. Với $q > n/2$ và $R \leq 1$, khi đó với mọi $\eta > 0$ tồn tại b đủ lớn sao cho nếu $k(q, 1) \leq \frac{1}{b}$ và $\|\mathrm{Ric}_-^K\|_{q,R} \leq \frac{1}{bR^2}$ thì

$$\frac{|\nabla u|}{u} \leq C_{p,m,V} \frac{1 + \sqrt{K}R}{R} + \eta$$

trên quả cầu trắc địa $B_o(\frac{R}{2})$, với $C_{p,m,V}$ chỉ phụ thuộc vào p, m và $V = V(B_o(R))$.

Hệ quả 4.2.7. *Cho (M, g) là một đa tạp Riemann đầy đủ. Giả sử $u \geq 1$ là một nghiệm dương của phương trình*

$$\Delta_f u + a u \log u = 0, \quad a \geq 0,$$

trên quả cầu trắc địa $B_o(R) \subset M$. Với $q > n/2$ và $R \leq 1$, khi đó với bất kì $\eta > 0$ tồn tại b đủ lớn sao cho nếu $k(q, 1) \leq \frac{1}{b}$ thì

$$\frac{|\nabla u|}{u} \leq C_{p,m,V} \frac{1 + \sqrt{K}R}{R} + \eta,$$

trên quả cầu trắc địa $B_o(\frac{R}{2})$, với $C_{p,m,V}$ chỉ phụ thuộc vào p, m và $V = V(B_o(R))$.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Kết luận

Luận án nghiên cứu tính triệt tiêu của các dạng vi phân p-điều hòa, định lí Liouville cho phương trình elliptic và ước lượng gradient cho phương trình p-Laplace có trọng trên đa tạp Riemann. Luận án đã đạt được một số kết quả sau:

- Đưa ra và chứng minh một số định lí về tính triệt tiêu của các dạng vi phân p-điều hòa trên đa tạp Riemann, trong đó các kết quả chính là các Định lí 1.1.2, Định lí 1.1.4, Định lí 1.1.6, Định lí 1.1.11, Định lí 1.2.2, Định lí 1.2.3, Định lí 1.2.5.
- Đưa ra và chứng minh một định lí Liouville, cùng các hệ quả của nó, cho phương trình elliptic trên đa tạp Riemann, trong đó kết quả chính là Định lí 1.3.2.
- Đưa ra và chứng minh một số định lí về ước lượng gradient cho phương trình p-Laplace có trọng trên đa tạp Riemann, trong đó kết quả chính là Định lí 1.4.2.

Kiến nghị

Trong quá trình nghiên cứu các vấn đề của luận án, chúng tôi suy nghĩ về một số hướng nghiên cứu tiếp theo như sau:

- Chúng tôi tiếp tục tìm cách đưa ra các điều kiện đủ trên đa tạp Riemann để các dạng vi phân p-điều hòa là triệt tiêu.
- Chúng tôi tiếp tục nghiên cứu định lí Liouville cho một số lớp phương trình đặc biệt trên đa tạp Riemann.
- Chúng tôi tiếp tục nghiên cứu các ước lượng gradient cho một số lớp phương trình p-Laplace, phương trình nhiệt trên đa tạp Riemann.

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH ĐÃ CÔNG BỐ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

[1] N. T. Dung, P. D. Thoan and N. D. Tuyen (2021), "Liouville theorems for nonlinear elliptic equations on Riemannian manifolds", *J. Math. Anal. Appl.* **496**, 124803.

[2] L. V. Dai, N. T. Dung, N. D. Tuyen and L. Zhao (2022), "Gradient estimates for weighted p-Laplacian equations on Riemannian manifolds with a Sobolev inequality and integral Ricci bounds", *Kodai Math. J.* **45**, 19–37.

[3] N. D. Tuyen (2022), "Vanishing theorems for p-harmonic forms on Riemannian manifolds", *Differ. Geom. Appl.* **82**, 101868.

[4] N. T. Dung and N. D. Tuyen (2023), "p-harmonic 1-forms on totally real submanifolds in complex space forms", *Complex Var. Elliptic Equ.* **68**(10), 1812–1832.