ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

Nguyễn Thị Kiều

THUẦN NHẤT HÓA CÁC BIÊN VÀ BIÊN PHÂN CHIA CÓ ĐỘ NHÁM CAO

Chuyên ngành: Cơ học vật rắn

Mã số: 9940109.02

(DỰ THẢO) TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ CƠ HỌC

Hà Nội - 2020

Công trình được hoàn thành tại:

Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội

Người hướng dẫn khoa học: GS. TS. Phạm Chí Vĩnh

TS. Đỗ Xuân Tùng

Phản biện: . . . .

. . . .

Phản biện: . . . .

. . . .

Phản biện: . . . .

. . . .

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng cấp Đại học Quốc gia chấm luận án tiến sĩ họp tại . . . .

vào hồi giờ ngày tháng năm 20...

Có thể tìm hiểu luận án tại:

- Thư viện Quốc gia Việt Nam

- Trung tâm Thông tin - Thư viện, Đại học Quốc gia Hà Nội

MỞ ĐẦU

Tính thời sự của đề tài luận án

Trong thực tế xuất hiện nhiều bài toán liên quan đến biên hay biên phân chia độ nhám cao (biên độ của chúng lớn hơn nhiều chu kỳ trong trường hợp tuần hoàn). Các bài toán liên quan đến biên hay biên phân chia độ nhám cao thường được giải bằng các phương pháp số. Tuy nhiên, lời giải số thường không ổn định, độ chính xác không cao, do độ nhám cao của biên hay biên phân chia gây ra. Để vượt qua khó khăn này, các nhà khoa học đã đưa ra ý tưởng thay thế biên, biên phân chia độ nhám cao bởi các biên, biên phân chia phẳng, bằng cách thay miền chứa biên hay biên phân chia độ nhám cao bằng một lớp vật liệu mới có biên là phẳng. Đó chính là ý tưởng của phương pháp thuần nhất hóa biên, biên phân chia có độ nhám cao.

Nếu các phương trình thuần nhất hóa được tìm ra có dạng hiện, tức là các hệ số của chúng là các hàm hiện của các tham số vật liệu của các môi trường và các tham số hình học đặc trưng cho biên hay biên có phân chia độ nhám cao, chúng sẽ trở thành một công cụ quan trọng để giải các bài toán thực tế khác nhau. Do vậy, thuần nhất hóa biên, biên phân chia có độ nhám cao để tìm ra các phương trình thuần nhất hóa dạng hiện là một bài toán hết sức có ý nghĩa về cả phương diện lý thuyết và ứng dụng thực tiễn, đang được nhiều nhà khoa học quan tâm. Luận án tiến hành thuần nhất hóa biên phân chia có độ nhám cao để tìm ra các phương trình thuần nhất hóa dạng hiện cho lý thuyết đàn hồi xốp và lý thuyết đàn hồi micropolar, nên đề tài luận án có tính cấp thiết, thời sự, có ý nghĩa khoa học và ứng dụng thực tiễn.

Mục tiêu của luận án

Thiết lập các phương trình thuần nhất hóa dạng hiện của lý thuyết đàn hồi xốp và đàn hồi micropolar trong các miền chứa biên phân chia độ nhám cao nằm giữa hai đường thẳng song song. Sử dụng các phương trình thuần nhất hóa dạng hiện thu được, khảo sát sự phản xạ, khúc xạ của các sóng phẳng đối với biên phân chia có độ nhám cao.

Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

1. Đối tượng nghiên cứu: Biên phân chia độ nhám cao giữa hai miền đàn hồi xốp, giữa hai miền đàn hồi micropolar, sóng phẳng trong các môi trường đàn hồi, đàn hồi xốp và đàn hồi micropolar.
2. Phạm vi nghiên cứu: Phương trình thuần nhất hóa dạng hiện và sự phản xạ, khúc xạ của sóng.

Phương pháp nghiên cứu

Luận án sử dụng phương pháp thuần nhất hóa kết hợp cách biểu diễn các phương trình cơ bản, các điều kiện liên tục của lý thuyết đàn hồi xốp, đàn hồi micropolar dưới dạng ma trận và cách biểu diễn nghiệm vi mô-vĩ mô.

Những đóng góp mới của luận án

1. Tìm ra các phương trình thuần nhất hóa dạng hiện đối với biên phân chia độ nhám cao nằm giữa hai đường thẳng song song cho các lý thuyết:

- Lý thuyết đàn hồi xốp.
- Lý thuyết đàn hồi micropolar.

Các phương trình thu được là công cụ quan trọng để giải các bài toán thực tế khác nhau liên quan đến biên phân chia độ nhám cao.

2. Khảo sát sự phản xạ, khúc xạ đối với biên phân chia độ nhám cao nằm giữa hai đường thẳng song song của:

- Sóng SH trong môi trường đàn hồi.
- Sóng SH trong môi trường đàn hồi xốp.
- Sóng chuyển dịch dọc trong môi trường đàn hồi micropolar.

Các công thức dạng đóng cho hệ số phản xạ và hệ số khúc xạ đã được tìm ra.

Sử dụng các công thức này, luận án đã chỉ ra rằng, biên phân chia độ nhám cao tuần hoàn có khả năng ngăn cản sóng đi qua trong một khoảng tần số nào đó (được gọi là band gaps).

3. Phát hiện "dạng tương đồng" của các phương trình cơ bản dạng ma trận với điều kiện liên tục.

Dạng tương đồng giúp việc giải bài toán trên nhân tuần hoàn đơn giản và kết quả: các phương trình thuần nhất hóa thu được ngắn gọn.

Cấu trúc của luận án

Luận án gồm bốn chương, phần mở đầu và phần kết luận.

Chương 1: Tổng quan.

Trình bày tổng quan về sự phát triển của bài toán thuần nhất hóa biên, biên phân chia độ nhám cao trước luận án. Trên cơ sở đó, xác định các vấn đề được nghiên cứu trong luận án, các mục tiêu chính và nội dung chính của luận án.

Chương 2: Thuần nhất hóa biên phân chia độ nhám cao giữa hai miền đàn hồi xốp.

Chương 3: Thuần nhất hóa biên phân chia độ nhám cao giữa hai miền đàn hồi micropolar.

Chương 4: Ứng dụng của các phương trình thuần nhất hóa dạng hiện cho bài toán phản xạ, khúc xạ.

Chương 1

TỔNG QUAN

1.1. Biên, biên phân chia

Vật thể Ω được giới hạn bởi mặt Γ thì mặt Γ được gọi là biên (boundary) của vật thể Ω.

Vật thể Ω gồm các vật liệu khác nhau, được phân cách với nhau bởi mặt S. Khi đó, S được gọi là biên phân chia (interface).

Nếu biên, biên phân chia nhám tuần hoàn có biên độ A nhỏ hơn nhiều so với chu kỳ ϵ thì được gọi là biên, biên phân chia có độ nhám thấp. Nếu biên độ A lớn hơn nhiều so với chu kỳ ϵ thì được gọi là biên, biên phân chia có độ nhám cao.

Trong luận án chỉ xét các biên phân chia nhám tuần hoàn.

1.2. Biên, biên phân chia có độ nhám thấp

Trong các lĩnh vực khác nhau của khoa học và công nghệ, xuất hiện nhiều các bài toán liên quan đến biên hay biên phân chia nhám, như sự tán xạ của các sóng trên biên nhám. Khi biên phân chia có độ nhám thấp (biên độ nhỏ hơn nhiều so với chu kì của nó), các nhà khoa học thường sử dụng phương pháp nhiễu (perturbation method) để giải các bài toán này. Năm 1981, Nayfeh đã tổng kết phương pháp nhiễu thành sách chuyên khảo. Phương pháp và các kết quả đạt được của bài toán biên phân chia độ nhám thấp đã khá hoàn chỉnh nên luận án không nghiên cứu các bài toán đối với biên phân chia độ nhám thấp.

1.3. Biên, biên phân chia có độ nhám cao

Trong thực tế xuất hiện rất nhiều bài toán liên quan đến biên hay biên phân chia độ nhám cao (biên độ lớn hơn nhiều so với chu kì của nó). Các bài toán liên quan đến biên hay biên phân chia có độ nhám cao không có lời giải giải tích. Các tác giả đã sử dụng phương pháp số để giải các bài toán này. Tuy nhiên, việc mô phỏng số rất khó khăn vì ở miền gần biên cần nhiều nút lưới và cấu trúc lưới không xác định, nghiệm số có tính ổn định không cao.

Để vượt qua khó khăn này, các nhà khoa học đã đưa ra ý tưởng thay thế biên phân chia độ nhám cao bởi các biên phẳng bằng cách thay miền chứa biên phân chia có độ nhám cao bằng một lớp vật liệu mới có biên là phẳng. Đó chính là ý tưởng chính để giải quyết bài toán thuần nhất hóa biên phân chia có độ nhám cao.

1.4. Thuần nhất hóa biên, biên phân chia độ nhám cao

1.4.1. Ý tưởng giải quyết bài toán

Ý tưởng giải quyết bài toán thuần nhất hóa biên, biên phân chia độ nhám cao là: thay miền chứa biên, biên phân chia độ nhám cao được bởi một lớp vật liệu mới có biên phẳng. Về mặt toán học điều này có nghĩa: cần tìm ra các phương trình đạo hàm riêng mô tả chuyển động của lớp vật liệu mới. Các phương trình này được gọi là các phương trình thuần nhất hóa. Mục tiêu chính của bài toán thuần nhất hóa biên, biên phân chia có độ nhám cao là *tìm ra các phương trình thuần nhất hóa dạng hiện.*

1.4.2. Sự phát triển của bài toán trước luận án

Thuần nhất hóa biên phân chia độ nhám cao trước năm 2010.

Trong giai đoạn này, các tác giả đã sử dụng các kỹ thuật của phương pháp thuần nhất hóa chủ yếu tập trung vào các bài toán thuần nhất hóa biên, biên phân chia độ nhám cao một phương trình. Những nghiên cứu về bài toán biên phân chia độ nhám cao với hai phương trình trở lên được nghiên cứu bởi Nevard và Keller (1997), Gilbert và Ou (2003). Họ đã tìm được các phương trình thuần nhất hóa nhưng dưới dạng ẩn vì các hệ số của phương trình được xác định bằng việc giải 27 phương trình vi phân đạo hàm riêng.

Thuần nhất hóa biên phân chia độ nhám cao từ năm 2010 đến trước luận án.

Các tác giả Vinh và Tung (2010, 2011) đã sử dụng các phương trình cơ bản và điều kiện biên dạng ma trận để tìm các phương trình thuần nhất hóa. Với cách tiếp cận này, các tác giả đã tìm được các *phương trình thuần nhất hóa dạng hiện (hệ số của chúng là các hàm hiển của các tham số vật liệu và đặc trưng hình học của biên phân chia)* đối với bài toán biên phân chia có độ nhám cao dao động giữa hai đường thẳng song song, hai đường tròn đồng tâm của các lý thuyết đàn hồi, đàn điện và đàn nhiệt. Các kết quả đạt được là công cụ để giải quyết các bài toán thực tế khác nhau.

Sự cồng kềnh của phương trình thuần nhất hóa khi biên phân chia dao động giữa hai đường tròn đồng tâm.

Các phương trình thuần nhất hóa dạng hiện của lý thuyết đàn hồi, đàn-đện đối với biên phân chia nằm giữa hai đường tròn đồng tâm rất cồng kềnh (các hệ số của chúng không chỉ chứa các toán tử trung bình mà còn chứa chính các hằng số vật liệu của từng môi trường). Nguyên nhân gây ra: điều kiện liên tục trên biên phân chia dao động nhanh giữa hai đường tròn đồng tâm chứa các đạo hàm riêng bậc nhất của chuyển dịch và chuyển dịch. Các điều kiện liên tục trên biên phân chia nằm giữa hai đường thẳng song song, phân chia hai môi trường đàn hồi xốp hoặc hai môi trường đàn hồi micropolar, ngoài các đạo hàm riêng bậc nhất của chuyển dịch, còn chứa chính bản thân chuyển dịch, nên các phương trình thuần nhất hóa dạng hiện thu được sẽ rất cồng kềnh nếu luận án tiếp tục sử dụng kỹ thuật của Vinh và Tung (2010) mà không có sự phát triển.

1.5. Các vấn đề nghiên cứu trong luận án

1.5.1. Thuần nhất hóa biên phân chia độ nhám cao đối với lý thuyết đàn hồi xốp và đàn hồi micropolar

Theo hiểu biết của nghiên cứu sinh, các phương trình thuần nhất hóa dạng hiện đối với các lý thuyết phức tạp hơn như: lý thuyết đàn hồi xốp (poroelasticity), đàn hồi micropolar vẫn chưa được tìm ra. Đây là hai vật liệu (môi trường) đang được sử dụng rộng rãi trong công nghệ hiện đại. Do vậy, **luận án sẽ phát triển các nghiên cứu của Vinh và Tung để tìm các phương trình thuần nhất hóa dạng hiện cho hai môi trường đàn hồi xốp và đàn hồi micropolar**.

1.5.2. Phản xạ, khúc xạ của sóng đối với biên phân chia độ nhám cao

Bài toán phản xạ, khúc xạ của sóng đàn hồi có ý nghĩa rất quan trọng trong âm học, địa vật lý, địa chấn học. Trước năm 2010, các hệ số phản xạ, khúc xạ của sóng đàn hồi đối với biên phân chia độ nhám cao chưa được tìm ra do các phương trình thuần nhất hóa đối với biên phân chia độ nhám cao đến thời điểm đó vẫn ở dạng ẩn.

Luận án sẽ nghiên cứu các bài toán phản xạ, khúc xạ của sóng phẳng đối với biên phân chia độ nhám cao nằm giữa hai đường thẳng song song trong môi trường đàn hồi xốp và đàn hồi micropolar bằng cách sử dụng các phương trình thuần nhất hóa dạng hiện được tìm ra.

Sử dụng phương pháp thuần nhất hóa, bài toán phản xạ, khúc xạ của các sóng đối với biên phân chia có độ nhám cao được đưa về bài toán phản xạ, khúc xạ đối với lớp vật liệu có biên là phẳng. Từ đó thu được công thức dạng hiện của hệ số phản xạ, khúc xạ.

1.5.3. Sự tương đồng giữa phương trình cơ bản dạng ma trận với điều kiện liên tục trên biên phân chia

Luận án đã tìm ra nguyên nhân gây ra sự cồng kềnh của phương trình thuần nhất hóa khi biên phân chia dao động giữa hai đường tròn đồng tâm. Đó là sự không tương đồng của các phương trình cơ bản dạng ma trận với điều kiện liên tục đối với véc tơ ứng lực trên biên phân chia. Do vậy, luận án sẽ cố gắng tìm ra dạng thích hợp của các phương trình cơ bản dạng ma trận của hai lý thuyết nêu trên, sao cho các phương trình thuần nhất hóa dạng hiện thu được có dạng đơn giản, chỉ chứa các toán tử trung bình.

1.6. Mục tiêu nghiên cứu của luận án

1. Thiết lập các phương trình thuần nhất hóa dạng hiện đối với biên phân chia độ nhám cao của lý thuyết đàn hồi xốp và đàn hồi micropolar.

2. Nghiên cứu sự phản xạ, khúc xạ của các sóng đối với biên phân chia có độ nhám cao trong môi trường đàn hồi xốp và đàn hồi micropolar.

3. Tìm ra dạng thích hợp của phương trình cơ bản dạng ma trận của lý thuyết đàn hồi xốp và đàn hồi micropolar.

Chương 2

THUẦN NHẤT HÓA BIÊN PHÂN CHIA ĐỘ NHÁM CAO GIỮA HAI MIỀN ĐÀN HỒI XỐP

Mục tiêu của chương 2 là thiết lập các *phương trình thuần nhất hóa dạng hiện của lý thuyết đàn hồi xốp* có biên phân chia độ nhám cao nằm giữa hai đường thẳng song song trong *miền hai chiều theo mô hình Auriault* và trong *miền ba chiều theo mô hình Biot*. Phương pháp được sử dụng trong chương 2 là phương pháp thuần nhất hóa.

2.1. Thuần nhất hóa biên phân chia độ nhám cao giữa hai miền đàn hồi xốp trong miền hai chiều theo mô hình của Auriault

2.1.1. Các phương trình cơ bản dạng ma trận

Xét môi trường đàn hồi xốp dị hướng với các lỗ chất lỏng là Newton và không nén được. Theo mô hình của Auriault, các phương trình cơ bản với các chuyển động điều hòa theo thời gian của môi trường đàn hồi xốp là:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{\Sigma} + \mathbf{f} &= -\omega^2\big(\rho\mathbf{u} + \rho_L\mathbf{w}\big), \;\; i\omega\mathbf{w} = \mathbf{K}\big(\omega^2\rho_L\mathbf{u} - \operatorname{grad}p\big), \\ \mathbf{\Sigma} &= \mathbf{C}\mathbf{e}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\alpha}p, \qquad \operatorname{div}\mathbf{w} = -\boldsymbol{\alpha} : \mathbf{e}(\mathbf{u}) - \beta p, \end{aligned} \tag{2.1}$$

trong đó $\mathbf{\Sigma} = (\sigma_{mn})$ là tensơ ứng suất, $\mathbf{C} = (c_{mn})$ là tensơ hằng số đàn hồi của nền, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_{ij})$ là tensơ đối xứng, β là đại lượng vô hướng, p là áp suất chất lỏng, $\mathbf{u} = (u_m)$ là véctơ dịch chuyển của chất rắn, $\mathbf{w} = f(\mathbf{U}_L - \mathbf{u})$ là dịch chuyển tương đối của chất lỏng đối với nền chất rắn, $\mathbf{w}=(w_m)$, $\mathbf{U}_L$ là véctơ dịch chuyển của chất lỏng, $\mathbf{e}(\mathbf{u}) = (e_{mn})$ là tensơ biến dạng, f là tính xốp, $\rho = (1-f)\rho_s + f\rho_L$ là mật độ khối lượng của composite, ρ_L là mật độ khối lượng của lỗ chất lỏng, ρ_s là mật độ khối lượng của nền, $\mathbf{K}=(k_{mn})$ là tensơ thấm Darcy đối xứng, $\mathbf{f}=(f_m)$ là lực khối tác dụng lên phần rắn.

Các phương trình (2.1) được viết dưới dạng ma trận như sau:

$$\begin{aligned} &\big(\mathbf{A}_{11}\mathbf{v}_{,1} + \mathbf{A}_{13}\mathbf{v}_{,3} + \mathbf{A}_{14}\mathbf{v}\big)_{,1} + \big(\mathbf{A}_{31}\mathbf{v}_{,1} + \mathbf{A}_{33}\mathbf{v}_{,3} + \mathbf{A}_{34}\mathbf{v}\big)_{,3} \\ &\qquad + \mathbf{B}\mathbf{v}_{,1} + \mathbf{D}\mathbf{v}_{,3} + \mathbf{E}\mathbf{v} + \mathbf{F} = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2.2}$$

trong đó $\mathbf{v} = [u_1\ u_2\ u_3\ p]^T$, $\mathbf{F} = [f_1\ f_2\ f_3\ 0]^T$ và các ma trận $\mathbf{A}_{hk}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ có dạng:

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{16} & c_{15} & 0 \\ c_{16} & c_{66} & c_{56} & 0 \\ c_{15} & c_{56} & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{11} \end{bmatrix}, \; \mathbf{A}_{13} = \begin{bmatrix} c_{15} & c_{14} & c_{13} & 0 \\ c_{56} & c_{46} & c_{36} & 0 \\ c_{55} & c_{45} & c_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{13} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{14} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha_{11} \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_{12} \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_{13} \\ i\omega\hat{\alpha}_{11} & i\omega\hat{\alpha}_{12} & i\omega\hat{\alpha}_{13} & 0 \end{bmatrix}, \; \mathbf{A}_{31} = \begin{bmatrix} c_{15} & c_{56} & c_{55} & 0 \\ c_{14} & c_{46} & c_{45} & 0 \\ c_{13} & c_{36} & c_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{13} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{33}=\begin{bmatrix}c_{55}&c_{45}&c_{35}&0\\c_{45}&c_{44}&c_{34}&0\\c_{35}&c_{34}&c_{33}&0\\0&0&0&k_{33}\end{bmatrix},\ \mathbf{A}_{34}=\begin{bmatrix}0&0&0&-\alpha_{13}\\0&0&0&-\alpha_{23}\\0&0&0&-\alpha_{33}\\i\omega\hat{\alpha}_{13}&i\omega\hat{\alpha}_{23}&i\omega\hat{\alpha}_{33}&0\end{bmatrix},\tag{2.3}$$

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0&0&0&\hat{\alpha}_{11}\\0&0&0&\hat{\alpha}_{12}\\0&0&0&\hat{\alpha}_{13}\\-i\omega\alpha_{11}&-i\omega\alpha_{12}&-i\omega\alpha_{13}&0\end{bmatrix},\ \mathbf{D}=\begin{bmatrix}0&0&0&\hat{\alpha}_{13}\\0&0&0&\hat{\alpha}_{23}\\0&0&0&\hat{\alpha}_{33}\\-i\omega\alpha_{13}&-i\omega\alpha_{23}&-i\omega\alpha_{33}&0\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E}=\omega^2\begin{bmatrix}\hat{\rho}_{11}&\hat{\rho}_{12}&\hat{\rho}_{13}&0\\\hat{\rho}_{12}&\hat{\rho}_{22}&\hat{\rho}_{23}&0\\\hat{\rho}_{13}&\hat{\rho}_{23}&\hat{\rho}_{33}&0\\0&0&0&-i\beta/\omega\end{bmatrix}.$$

Phương trình (2.2) là phương trình cơ bản dạng ma trận của lý thuyết đàn hồi xốp.

2.1.2. Các điều kiện liên tục dạng ma trận

Xét một vật thể đàn hồi xốp dị hướng chiếm các miền hai chiều $\Omega^{(+)}, \Omega^{(-)}$ của mặt phẳng x_1, x_3 được phân chia bởi đường cong L có phương trình $x_3 = h(y)$, $y = x_1/\epsilon$ $(\epsilon > 0)$, trong đó $h(y)$ tuần hoàn với chu kỳ 1. Giả thiết đường cong L nằm giữa hai đường thẳng $x_3 = -A, (A > 0)$ và $x_3 = 0$. Trong miền $0 < x_1 < \epsilon$, mỗi đường thẳng $x_3 = x_3^0 = \text{const}$ $(-A < x_3^0 < 0)$ giao với đường cong L tại đúng hai điểm. Cho $0 < \epsilon << 1$, khi đó L được gọi là biên phân chia có độ nhám cao của $\Omega^{(+)}$ và $\Omega^{(-)}$.

Giả sử rằng, các vật liệu đàn hồi xốp dị hướng thuần nhất khác nhau nằm trên các miền $\Omega^{(+)}$, $\Omega^{(-)}$. Các tham số vật liệu được xác định như sau:

$$c_{ij},\, k_{ij},\, \alpha_{ij},\, \beta,\, f,\, \rho_s,\, \rho_L = \begin{cases} c_{ij}^{(+)},\, k_{ij}^{(+)},\, \alpha_{ij}^{(+)},\, \beta^{(+)},\, f^{(+)},\, \rho_s^{(+)},\, \rho_L^{(+)} & \text{với } x_3 > h(x_1/\epsilon) \\ c_{ij}^{(-)},\, k_{ij}^{(-)},\, \alpha_{ij}^{(-)},\, \beta^{(-)},\, f^{(-)},\, \rho_s^{(-)},\, \rho_L^{(-)} & \text{với } x_3 < h(x_1/\epsilon) \end{cases}\tag{2.4}$$

trong đó $c_{ij}^{(+)}, ..., \rho_L^{(+)}, c_{ij}^{(-)}, .., \rho_L^{(-)}$ là các hằng số.

Giả sử $\Omega^{(+)}$, $\Omega^{(-)}$ gắn chặt với nhau, điều kiện liên tục trên biên phân chia L là:

$$[u_i]_L = 0,\quad [p]_L = 0,\quad [\sigma_{ik}n_k]_L = 0,\quad [\hat{w}_k n_k]_L = 0,\ i = 1, 2, 3$$

trong đó n_k là thành phần theo trục x_k của véctơ pháp tuyến đơn vị đối với đường cong L và ký hiệu $[\,\mathbf{f}\,]_L = \mathbf{f}^{(+)} - \mathbf{f}^{(-)}$ trên L.

Điều kiện liên tục (2.5) được viết dưới dạng ma trận như sau:

$$[\mathbf{v}]_L = 0,\ \Big[\big(\mathbf{A}_{11}\mathbf{v}_{,1} + \mathbf{A}_{13}\mathbf{v}_{,3} + \mathbf{A}_{14}\mathbf{v}\big)n_1 + \big(\mathbf{A}_{31}\mathbf{v}_{,1} + \mathbf{A}_{33}\mathbf{v}_{,3} + \mathbf{A}_{34}\mathbf{v}\big)n_3\Big]_L = 0.\tag{2.5}$$

Như vậy, *ta cần thuần nhất hóa phương trình cơ bản dạng ma trận (2.2) cùng các điều kiện liên tục dạng ma trận (2.5) trong miền chứa biên phân chia độ nhám cao.*

2.1.3. Phương trình thuần nhất hóa dạng hiện dạng ma trận

Giả thiết $\mathbf{v}(x_1,x_3,\epsilon)$=$\mathbf{U}(x_1,y,x_3,\epsilon)$. Ta biểu diễn $\mathbf{U}$ dưới dạng sau:

$$\begin{aligned}\mathbf{U} = \mathbf{V} + \epsilon\left(\mathbf{N}^1\mathbf{V} + \mathbf{N}^{11}\mathbf{V}_{,1} + \mathbf{N}^{13}\mathbf{V}_{,3}\right) + \epsilon^2\Big(\mathbf{N}^2\mathbf{V} + \mathbf{N}^{21}\mathbf{V}_{,1} + \mathbf{N}^{23}\mathbf{V}_{,3} \\ + \mathbf{N}^{211}\mathbf{V}_{,11} + \mathbf{N}^{213}\mathbf{V}_{,13} + \mathbf{N}^{233}\mathbf{V}_{,33}\Big) + O(\epsilon^3)\end{aligned} \tag{2.6}$$

trong đó $\mathbf{V}$=$\mathbf{V}(x_1,x_3)$, các ma trận 4×4 $\mathbf{N}^1$,..., $\mathbf{N}^{233}$ là hàm của y, x_3, tuần hoàn theo y với chu kỳ 1 và được xác định sao cho phương trình (2.2) và điều kiện liên tục (2.5) thỏa mãn.

Nhận xét 2.1: Từ (2.6) ta thấy rằng $\mathbf{u}$ dần đến $\mathbf{V}$ khi ϵ tiến đến 0, do đó, $\mathbf{V}$ là số hạng chính của $\mathbf{u}$. Như vậy, ta cần tìm phương trình đối với $\mathbf{V}$. Phương trình này được gọi là phương trình thuần nhất hóa của phương trình đối với $\mathbf{u}$.

Sử dụng các kỹ thuật của phương pháp thuần nhất hóa, ta chứng minh được định lý sau:

Định lý 2.1

Cho $\mathbf{v}(x_1,x_3,\epsilon)$ thỏa mãn phương trình cơ bản dạng ma trận (2.2) và điều kiện liên tục (2.5) với $\mathbf{A}_{hk}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ $\mathbf{E}$ được xác định trong (2.3). Đường cong L: $x_3 = h(y)$, $y = x_1/\epsilon$ là biên phân chia độ nhám cao dao động giữa hai đường thẳng $x_3 = 0$ và $x_3 = -A$ ($A > 0$). $h(y)$ là hàm khả vi tuần hoàn theo y với chu kỳ 1. Giả thiết thêm rằng $\mathbf{v}(x_1,x_3,\epsilon)$=$\mathbf{U}(x_1,y,x_3,\epsilon)$ và $\mathbf{U}(x_1,y,x_3,\epsilon)$ có dạng khai triển tiệm cận (2.6). Khi đó $\mathbf{V}(x_1,x_3)$ là nghiệm của bài toán sau:

Với $x_3 > 0$:

$$\mathbf{A}_{hk}^{(+)}\mathbf{V}_{,kh} + \left(\mathbf{A}_{14}^{(+)} + \mathbf{B}^{(+)}\right)\mathbf{V}_{,1} + \left(\mathbf{A}_{34}^{(+)} + \mathbf{D}^{(+)}\right)\mathbf{V}_{,3} + \mathbf{E}^{(+)}\mathbf{V} + \mathbf{F}^{(+)} = \mathbf{0}. \tag{2.7}$$

Với $-A < x_3 < 0$:

$$\begin{aligned}&\langle\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle^{-1}\mathbf{V}_{,11} + \langle\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle^{-1}\langle\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{13}\rangle\mathbf{V}_{,13} + \Big\{\langle\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle\langle\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle^{-1}\mathbf{V}_{,1}\Big\}_{,3} \\ &+ \Big\{\Big(\langle\mathbf{A}_{33}\rangle + \langle\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle\langle\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle^{-1}\langle\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{13}\rangle - \langle\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{13}\rangle\Big)\mathbf{V}_{,3}\Big\}_{,3} \\ &+ \Big(\langle\mathbf{B}\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle\langle\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle^{-1} + \langle\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle^{-1}\langle\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{14}\rangle\Big)\mathbf{V}_{,1} \\ &+ \Big(\langle\mathbf{D}\rangle + \langle\mathbf{B}\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle\langle\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle^{-1}\langle\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{13}\rangle - \langle\mathbf{B}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{13}\rangle\Big)\mathbf{V}_{,3} \\ &+ \Big\{\Big(\langle\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle\langle\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle^{-1}\langle\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{14}\rangle - \langle\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{14}\rangle + \langle\mathbf{A}_{34}\rangle\Big)\mathbf{V}\Big\}_{,3} \\ &+ \Big(\langle\mathbf{E}\rangle + \langle\mathbf{B}\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle\langle\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle^{-1}\langle\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{14}\rangle - \langle\mathbf{B}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{14}\rangle\Big)\mathbf{V} + \langle\mathbf{F}\rangle = 0.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Với $x_3 < -A$:

$$\mathbf{A}_{hk}^{(-)}\mathbf{V}_{,kh} + \left(\mathbf{A}_{14}^{(-)} + \mathbf{B}^{(-)}\right)\mathbf{V}_{,1} + \left(\mathbf{A}_{34}^{(-)} + \mathbf{D}^{(-)}\right)\mathbf{V}_{,3} + \mathbf{E}^{(-)}\mathbf{V} + \mathbf{F}^{(-)} = \mathbf{0}. \tag{2.9}$$

Điều kiện liên tục trên các đường thẳng $x_3 = 0$ và $x_3 = -A$:

$$[\,\mathbf{V}\,]_{L^*} = 0,$$

$$\Big[\,\Big(\langle\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle\langle\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle^{-1}\langle\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{14}\rangle - \langle\mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{14}\rangle + \langle\mathbf{A}_{34}\rangle\Big)\mathbf{V}$$

$$+ \langle \mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle\langle \mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle^{-1}\mathbf{V}_{,1} + \Big(\langle \mathbf{A}_{33}\rangle + \langle \mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle\langle \mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle^{-1}\langle \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{13}\rangle$$

$$- \langle \mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{13}\rangle\Big)\mathbf{V}_{,3}\Big]_{L^*} = 0,\ L^* : x_3 = 0,\ x_3 = -A \tag{2.10}$$

với $\langle\varphi\rangle(x_3) = \int_0^1 \varphi dy = (y_2 - y_1)\varphi^{(+)} + (1 - y_2 + y_1)\varphi^{(-)}$ trong đó $y_1, y_2 (0 < y_1 < y_2 < 1)$ là hai nghiệm trong khoảng (0 1) của phương trình $h(y) = x_3$ đối với biến y.

Như vậy, phương trình (2.8) là phương trình thuần nhất hóa dạng hiện dạng ma trận của phương trình cơ bản dạng ma trận (2.2).

2.1.4. Phân tích sự tương đồng giữa phương trình cơ bản dạng ma trận và điều kiện liên tục dạng ma trận

Điều kiện liên tục (2.5) trên biên phân chia độ nhám cao nằm giữa hai đường thẳng song song, phân chia hai môi trường đàn hồi xốp, có chứa cả đạo hàm bậc nhất của chuyển dịch và bản thân chuyển dịch. Nếu ta không biểu diễn phương trình cơ bản dạng ma trận theo cách mới (2.2) mà biểu diễn phương trình cơ bản theo Vinh và Tung thì việc giải các bài toán biên trên nhân tuần hoàn sẽ phức tạp và phương trình thuần nhất hóa thu được sẽ cồng kềnh. Do trong luận án đã biểu diễn phương trình cơ bản dạng ma trận (2.2) tương đồng với điều kiện liên tục nên phương trình thuần nhất hóa dạng hiện thu được (2.7)-(2.9) có dạng ngắn gọn và các hệ số của phương trình chỉ phụ thuộc vào các toán tử trung bình hóa.

2.1.5. Các phương trình thuần nhất hóa dạng hiện dạng thành phần cho vật liệu đàn hồi xốp trực hướng

Vật liệu đàn hồi xốp trực hướng có tính chất sau: $c_{k4} = c_{k5} = c_{k6} = 0$ $(k = 1, 2, 3)$, $c_{45} = c_{46} = c_{56} = 0$, $\alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{23} = 0$, $k_{12} = k_{13} = k_{23} = 0$. Khi đó, các phương trình thuần nhất hóa (2.7)-(2.9) có dạng thành phần là:

Với $x_3 > 0$:

$$\begin{cases} c_{11}^{(+)}V_{1,11} + c_{55}^{(+)}V_{1,33} + \omega^2\left(\rho^{(+)} - i\omega\rho_L^{(+)2}k_{11}^{(+)}\right)V_1 + \left(c_{55}^{(+)} + c_{13}^{(+)}\right)V_{3,13} \\ -\left(\alpha_{11}^{(+)} - i\omega\rho_L^{(+)}k_{11}^{(+)}\right)P_{,1} + f_1^{(+)} = 0, \\ c_{66}^{(+)}V_{2,11} + c_{44}^{(+)}V_{2,33} + \omega^2\left(\rho^{(+)} - i\omega\rho_L^{(+)2}k_{22}^{(+)}\right)V_2 + f_2^{(+)} = 0, \\ (c_{55}^{(+)} + c_{13}^{(+)})V_{1,13} + c_{55}^{(+)}V_{3,11} + c_{33}^{(+)}V_{3,33} + \omega^2\left(\rho^{(+)} - i\omega\rho_L^{(+)2}k_{33}^{(+)}\right)V_3 \\ -\left(\alpha_{33}^{(+)} - i\omega\rho_L^{(+)}k_{33}^{(+)}\right)P_{,3} + f_3^{(+)} = 0, \\ -\left(\omega^2\rho_L^{(+)}k_{11}^{(+)} + i\omega\alpha_{11}^{(+)}\right)V_{1,1} - \left(\omega^2\rho_L^{(+)}k_{33}^{(+)} + i\omega\alpha_{33}^{(+)}\right)V_{3,3} + k_{11}^{(+)}P_{,11} \\ +k_{33}^{(+)}P_{,33} - i\omega\beta^{(+)}P = 0. \end{cases} \tag{2.11}$$

Với $x_3 < -A$:
Các phương trình trong miền này giống với các phương trình (2.11) chỉ thay các ký hiệu "(+)" bởi các ký hiệu "(−)".

Với $-A < x_3 < 0$:

$$\begin{cases}
\langle c_{11}^{-1}\rangle^{-1}V_{1,11} + \big(\langle c_{55}^{-1}\rangle^{-1}V_{1,3}\big)_{,3} + \omega^2\Big(\langle\rho\rangle - i\omega\langle k_{11}^{-1}\rangle^{-1}\langle\rho_L\rangle^2\Big)V_1 + \big(\langle c_{55}^{-1}\rangle^{-1}V_{3,1}\big)_{,3} \\
+\langle c_{11}^{-1}\rangle^{-1}\langle\dfrac{c_{13}}{c_{11}}\rangle V_{3,13} - \Big(\langle c_{11}^{-1}\rangle^{-1}\langle\dfrac{\alpha_{11}}{c_{11}}\rangle - i\omega\langle k_{11}^{-1}\rangle^{-1}\langle\rho_L\rangle\Big)P_{,1} + \langle f_1\rangle = 0, \\
\langle c_{66}^{-1}\rangle^{-1}V_{2,11} + \big(\langle c_{44}\rangle V_{2,3}\big)_{,3} + \omega^2\Big(\langle\rho\rangle - i\omega\langle k_{22}\rho_L^2\rangle\Big)V_2 + \langle f_2\rangle = 0, \\
\langle c_{55}^{-1}\rangle^{-1}V_{1,13} + \big(\langle c_{11}^{-1}\rangle^{-1}\langle\dfrac{c_{13}}{c_{11}}\rangle V_{1,1}\big)_{,3} + \langle c_{55}^{-1}\rangle^{-1}V_{3,11} + \Big\{\Big(\langle c_{11}^{-1}\rangle^{-1}\langle\dfrac{c_{13}}{c_{11}}\rangle^2 \\
+\langle(c_{11}c_{33} - c_{13}^2)/c_{11}\rangle\Big)V_{3,3}\Big\}_{,3} + \omega^2\Big(\langle\rho\rangle - i\omega\langle k_{33}\rho_L^2\rangle\Big)V_3 + i\omega\langle k_{33}\rho_L\rangle P_{,3} \\
+\Big\{\Big(\langle\dfrac{\alpha_{11}c_{13}}{c_{11}}\rangle - \langle c_{11}^{-1}\rangle^{-1}\langle\dfrac{c_{13}}{c_{11}}\rangle\langle\dfrac{\alpha_{11}}{c_{11}}\rangle - \langle\alpha_{33}\rangle\Big)P\Big\}_{,3} + \langle f_3\rangle = 0, \\
-\Big(\omega^2\langle k_{11}^{-1}\rangle^{-1}\langle\rho_L\rangle + i\omega\langle c_{11}^{-1}\rangle^{-1}\langle\dfrac{\alpha_{11}}{c_{11}}\rangle\Big)V_{1,1} + i\omega\Big(\langle\dfrac{\alpha_{11}c_{13}}{c_{11}}\rangle - \langle c_{11}^{-1}\rangle^{-1}\langle\dfrac{c_{13}}{c_{11}}\rangle\langle\dfrac{\alpha_{11}}{c_{11}}\rangle \\
-\langle\alpha_{33}\rangle\Big)V_{3,3} - \omega^2\big(\langle k_{33}\rho_L\rangle V_3\big)_{,3} + \langle k_{11}^{-1}\rangle^{-1}P_{,11} + \big(\langle k_{33}\rangle P_{,3}\big)_{,3} - i\omega\Big(\langle\beta\rangle + \langle\dfrac{\alpha_{11}^2}{c_{11}}\rangle \\
-\langle c_{11}^{-1}\rangle^{-1}\langle\dfrac{\alpha_{11}}{c_{11}}\rangle^2\Big)P = 0.
\end{cases} \tag{2.12}$$

trong đó V_1, V_2, V_3 và P là các thành phần của véctơ $\mathbf{V}$.

Các đại lượng $V_1, V_2, V_3, P, \sigma_{13}^0, \sigma_{23}^0, \sigma_{33}^0, \hat{w}_3^0$ phải liên tục trên các đường thẳng: $x_3 = -A, x_3 = 0$, trong đó:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{13}^0 = \langle c_{55}^{-1}\rangle^{-1}\big(V_{1,3} + V_{3,1}\big),\ \sigma_{23}^0 = \langle c_{44}\rangle V_{2,3}, \\
&\sigma_{33}^0 = \langle c_{11}^{-1}\rangle^{-1}\langle\frac{c_{13}}{c_{11}}\rangle V_{1,1} + \Big(\langle c_{11}^{-1}\rangle^{-1}\langle\frac{c_{13}}{c_{11}}\rangle^2 + \langle(c_{11}c_{33} - c_{13}^2)/c_{11}\rangle\Big)V_{3,3} \\
&\qquad + \Big(\langle\frac{\alpha_{11}c_{13}}{c_{11}}\rangle - \langle c_{11}^{-1}\rangle^{-1}\langle\frac{c_{13}}{c_{11}}\rangle\langle\frac{\alpha_{11}}{c_{11}}\rangle - \langle\alpha_{33}\rangle\Big)P, \\
&\hat{w}_3^0 = -\omega^2\langle k_{33}\rho_L\rangle V_3 + \langle k_{33}\rangle P_{,3}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

2.2. Thuần nhất hóa biên phân chia độ nhám cao giữa hai miền đàn hồi xốp trong miền ba chiều theo mô hình của Biot

2.2.1. Các phương trình cơ bản dạng ma trận

Xét môi trường đàn hồi xốp dị hướng với các lỗ chứa chất lỏng là Newton và không nén được. Theo mô hình của Biot (1956), các phương trình cơ bản của môi trường đàn hồi xốp với các chuyển động là điều hòa theo thời gian có dạng:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}\boldsymbol{\Sigma} + \mathbf{f} = -\omega^2\big(\rho\mathbf{u} + \rho_L\mathbf{w}\big), && \rho_L\ddot{\mathbf{u}} + \rho_w\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{K}^{-1}\dot{\mathbf{w}} + \operatorname{grad}p = 0, \\
&\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{C}\mathbf{e}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\alpha}p, && \operatorname{div}\mathbf{w} = -\boldsymbol{\alpha} : \mathbf{e}(\mathbf{u}) - \beta p,
\end{aligned} \tag{2.14}$$

trong đó $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_{ij})$ là tensơ hệ số ứng suất hiệu dụng Biot, β là nghịch đảo của môđun Biot tương ứng với hệ số nén của chất lỏng và của nền.

Phương trình (2.14) có dạng ma trận như sau:

$$\begin{aligned}&\left(\mathbf{A}_{11}\mathbf{v}_{,1}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{v}_{,2}+\mathbf{A}_{13}\mathbf{v}_{,3}+\mathbf{A}_{14}\mathbf{v}\right)_{,1}+\left(\mathbf{A}_{21}\mathbf{v}_{,1}+\mathbf{A}_{22}\mathbf{v}_{,2}+\mathbf{A}_{23}\mathbf{v}_{,3}+\mathbf{A}_{24}\mathbf{v}\right)_{,2}\\&+\left(\mathbf{A}_{31}\mathbf{v}_{,1}+\mathbf{A}_{32}\mathbf{v}_{,2}+\mathbf{A}_{33}\mathbf{v}_{,3}+\mathbf{A}_{34}\mathbf{v}\right)_{,3}+\mathbf{B}\mathbf{v}_{,1}+\mathbf{G}\mathbf{v}_{,2}+\mathbf{D}\mathbf{v}_{,3}+\mathbf{E}\mathbf{v}+\mathbf{F}=\mathbf{0}.\end{aligned} \tag{2.15}$$

trong đó $\mathbf{v}=[u_1\ u_2\ u_3\ p]^T$, $\mathbf{F}=[f_1\ f_2\ f_3\ 0]^T$ và các ma trận $\mathbf{A}_{hk}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ có dạng:

$$\begin{gathered}
\mathbf{A}_{11}=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{16}&c_{15}&0\\c_{16}&c_{66}&c_{56}&0\\c_{15}&c_{56}&c_{55}&0\\0&0&0&\hat{k}_{11}\end{bmatrix},\ \mathbf{A}_{12}=\begin{bmatrix}c_{16}&c_{12}&c_{14}&0\\c_{66}&c_{26}&c_{46}&0\\c_{56}&c_{25}&c_{45}&0\\0&0&0&\hat{k}_{12}\end{bmatrix},\\
\mathbf{A}_{13}=\begin{bmatrix}c_{15}&c_{14}&c_{13}&0\\c_{56}&c_{46}&c_{36}&0\\c_{55}&c_{45}&c_{35}&0\\0&0&0&\hat{k}_{13}\end{bmatrix},\ \mathbf{A}_{14}=\begin{bmatrix}0&0&0&-\alpha_{11}\\0&0&0&-\alpha_{12}\\0&0&0&-\alpha_{13}\\i\omega\hat{\alpha}_{11}&i\omega\hat{\alpha}_{12}&i\omega\hat{\alpha}_{13}&0\end{bmatrix},\\
\mathbf{A}_{21}=\begin{bmatrix}c_{16}&c_{66}&c_{56}&0\\c_{12}&c_{26}&c_{25}&0\\c_{14}&c_{46}&c_{45}&0\\0&0&0&\hat{k}_{12}\end{bmatrix},\ \mathbf{A}_{22}=\begin{bmatrix}c_{66}&c_{26}&c_{46}&0\\c_{26}&c_{22}&c_{24}&0\\c_{46}&c_{24}&c_{44}&0\\0&0&0&\hat{k}_{22}\end{bmatrix},\\
\mathbf{A}_{23}=\begin{bmatrix}c_{56}&c_{46}&c_{36}&0\\c_{25}&c_{24}&c_{23}&0\\c_{45}&c_{44}&c_{34}&0\\0&0&0&\hat{k}_{23}\end{bmatrix},\ \mathbf{A}_{24}=\begin{bmatrix}0&0&0&-\alpha_{12}\\0&0&0&-\alpha_{22}\\0&0&0&-\alpha_{23}\\i\omega\hat{\alpha}_{12}&i\omega\hat{\alpha}_{22}&i\omega\hat{\alpha}_{23}&0\end{bmatrix},\\
\mathbf{A}_{31}=\begin{bmatrix}c_{15}&c_{56}&c_{55}&0\\c_{14}&c_{46}&c_{45}&0\\c_{13}&c_{36}&c_{35}&0\\0&0&0&\hat{k}_{13}\end{bmatrix},\ \mathbf{A}_{32}=\begin{bmatrix}c_{56}&c_{25}&c_{45}&0\\c_{46}&c_{24}&c_{44}&0\\c_{36}&c_{23}&c_{34}&0\\0&0&0&\hat{k}_{23}\end{bmatrix},\qquad(2.16)\\
\mathbf{A}_{33}=\begin{bmatrix}c_{55}&c_{45}&c_{35}&0\\c_{45}&c_{44}&c_{34}&0\\c_{35}&c_{34}&c_{33}&0\\0&0&0&\hat{k}_{33}\end{bmatrix},\ \mathbf{A}_{34}=\begin{bmatrix}0&0&0&-\alpha_{13}\\0&0&0&-\alpha_{23}\\0&0&0&-\alpha_{33}\\i\omega\hat{\alpha}_{13}&i\omega\hat{\alpha}_{23}&i\omega\hat{\alpha}_{33}&0\end{bmatrix},\\
\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0&0&0&\hat{\alpha}_{11}\\0&0&0&\hat{\alpha}_{12}\\0&0&0&\hat{\alpha}_{13}\\-i\omega\alpha_{11}&-i\omega\alpha_{12}&-i\omega\alpha_{13}&0\end{bmatrix},\ \mathbf{G}=\begin{bmatrix}0&0&0&\hat{\alpha}_{12}\\0&0&0&\hat{\alpha}_{22}\\0&0&0&\hat{\alpha}_{23}\\-i\omega\alpha_{12}&-i\omega\alpha_{22}&-i\omega\alpha_{23}&0\end{bmatrix},\\
\mathbf{D}=\begin{bmatrix}0&0&0&\hat{\alpha}_{13}\\0&0&0&\hat{\alpha}_{23}\\0&0&0&\hat{\alpha}_{33}\\-i\omega\alpha_{13}&-i\omega\alpha_{23}&-i\omega\alpha_{33}&0\end{bmatrix},\ \mathbf{E}=\omega^2\begin{bmatrix}\hat{\rho}_{11}&\hat{\rho}_{12}&\hat{\rho}_{13}&0\\\hat{\rho}_{12}&\hat{\rho}_{22}&\hat{\rho}_{23}&0\\\hat{\rho}_{13}&\hat{\rho}_{23}&\hat{\rho}_{33}&0\\0&0&0&-i\beta/\omega\end{bmatrix}.
\end{gathered}$$

2.2.2. Các điều kiện liên tục dạng ma trận

Xét vật thể đàn hồi xốp tuyến tính nằm trong các miền ba chiều $\Omega^{(+)}$, $\Omega^{(-)}$, biên phân chia L là một mặt trụ có đường sinh song song với Ox_2 và đường chuẩn (dọc theo mặt phẳng $x_2 = 0$) được biểu diễn bởi phương trình $x_3 = h(y)$, $y = x_1/\epsilon$ ($\epsilon > 0$), trong đó hàm $h(y)$ tuần hoàn với chu kỳ 1. Giả sử các vật liệu đàn hồi xốp thuần nhất nằm trong các miền $\Omega^{(+)}$, $\Omega^{(-)}$ là khác nhau. Các tham số vật liệu được xác định như sau:

$$c_{ij}, k_{ij}, \alpha, \beta, f, \rho_s, \rho_w, \rho_L = \begin{cases} c_{ij}^{(+)},\ k_{ij}^{(+)},\ \alpha^{(+)},\ \beta^{(+)},\ f^{(+)},\ \rho_s^{(+)},\ \rho_w^{(+)},\ \rho_L^{(+)},\ x_3 > h(\dfrac{x_1}{\epsilon}) \\ c_{ij}^{(-)},\ k_{ij}^{(-)},\ \alpha^{(-)},\ \beta^{(-)},\ f^{(-)},\ \rho_s^{(-)},\ \rho_w^{(-)},\ \rho_L^{(-)},\ x_3 < h(\dfrac{x_1}{\epsilon}) \end{cases} \tag{2.17}$$

trong đó $c_{ij}^{(+)}, ..., \rho_L^{(+)}, c_{ij}^{(-)}, .., \rho_L^{(-)}$ là các hằng số.

Giả sử rằng $\Omega^{(+)}$, $\Omega^{(-)}$ gắn chặt với nhau, điều kiện liên tục có dạng ma trận là:

$$\begin{aligned} &\big[\mathbf{v}\big]_L = 0. \\ &\big[\big(\mathbf{A}_{11}\mathbf{v}_{,1} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{v}_{,2} + \mathbf{A}_{13}\mathbf{v}_{,3} + \mathbf{A}_{14}\mathbf{v}\big)n_1 \\ &+ \big(\mathbf{A}_{31}\mathbf{v}_{,1} + \mathbf{A}_{32}\mathbf{v}_{,2} + \mathbf{A}_{33}\mathbf{v}_{,3} + \mathbf{A}_{34}\mathbf{v}\big)n_3\big]_L = 0. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Ta cần thuần nhất hóa phương trình cơ bản dạng ma trận (2.15) cùng các điều kiện liên tục dạng ma trận (2.18) trong miền chứa biên phân chia độ nhám cao.

2.2.3. Phương trình thuần nhất hóa dạng hiện dạng ma trận

Giả thiết $\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3, \epsilon)$=$\mathbf{U}(x_1, y, x_2, x_3, \epsilon)$. Ta biểu diễn $\mathbf{U}$ dưới dạng sau:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{V} + \epsilon\big(\mathbf{N}^1\mathbf{V} + \mathbf{N}^{11}\mathbf{V}_{,1} + \mathbf{N}^{12}\mathbf{V}_{,2} + \mathbf{N}^{13}\mathbf{V}_{,3}\big) \\ &+ \epsilon^2\big(\mathbf{N}^2\mathbf{V} + \mathbf{N}^{21}\mathbf{V}_{,1} + \mathbf{N}^{22}\mathbf{V}_{,2} + \mathbf{N}^{23}\mathbf{V}_{,3} + \mathbf{N}^{211}\mathbf{V}_{,11} \\ &+ \mathbf{N}^{212}\mathbf{V}_{,12} + \mathbf{N}^{213}\mathbf{V}_{,13} + \mathbf{N}^{222}\mathbf{V}_{,22} + \mathbf{N}^{223}\mathbf{V}_{,23} + \mathbf{N}^{233}\mathbf{V}_{,33}\big) + O(\epsilon^3) \end{aligned} \tag{2.19}$$

trong đó $\mathbf{V}$=$\mathbf{V}(x_1, x_2, x_3)$, các ma trận 4×4 $\mathbf{N}^1$, ..., $\mathbf{N}^{233}$ là hàm của y, x_3, tuần hoàn theo y với chu kỳ 1 và được xác định sao cho phương trình (2.15) và điều kiện liên tục (2.18) thỏa mãn.

Thực hiện các kỹ thuật của phương pháp thuần nhất hóa, ta có Định lý sau:

Định lý 2.2

Cho $\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3, \epsilon)$ thỏa mãn phương trình cơ bản (2.15) và điều kiện liên tục (2.18) với $\mathbf{A}_{hk}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ được cho trong (2.16). Biên phân chia độ nhám cao L: $x_3 = h(y)$, $y = x_1/\epsilon$ nằm giữa hai mặt phẳng $x_3 = 0$ và $x_3 = -A$ ($A > 0$). $h(y)$ là hàm khả vi tuần hoàn theo y với chu kỳ 1. Giả thiết thêm rằng $\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3, \epsilon)$ = $\mathbf{U}(x_1, y, x_2, x_3, \epsilon)$ và $\mathbf{U}(x_1, y, x_2, x_3, \epsilon)$ có dạng khai triển tiệm cận (2.19). Khi đó $\mathbf{V}(x_1, x_2, x_3)$ là nghiệm của bài toán:

Với $x_3 > 0$ và $x_3 < -A$:

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}_{hk}^{(\pm)}\mathbf{V}_{,kh} + \big(\mathbf{A}_{14}^{(\pm)} + \mathbf{B}^{(\pm)}\big)\mathbf{V}_{,1} + \big(\mathbf{A}_{24}^{(\pm)} + \mathbf{G}^{(\pm)}\big)\mathbf{V}_{,2} \\ &\quad + \big(\mathbf{A}_{34}^{(\pm)} + \mathbf{D}^{(\pm)}\big)\mathbf{V}_{,3} + \mathbf{E}^{(\pm)}\mathbf{V} + \mathbf{F}^{(\pm)} = \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Ta lấy dấu $(+)$ ứng với bán không gian $\Omega^{(+)}$, dấu $(-)$ ứng với bán không gian $\Omega^{(-)}$.

Với $-A < x_3 < 0$*:*

$$
\begin{aligned}
&\langle \mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle^{-1}\mathbf{V}_{,11} + \Big(\langle \mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle^{-1}\langle \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\rangle + \langle \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle\langle \mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle^{-1}\Big)\mathbf{V}_{,12}\\
&+ \langle \mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle^{-1}\langle \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{13}\rangle\mathbf{V}_{,13} + \Big(\langle \mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle\langle \mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle^{-1}\mathbf{V}_{,1}\Big)_{,3}\\
&+ \Big(\langle \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle\langle \mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle^{-1}\langle \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\rangle - \langle \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\rangle + \langle \mathbf{A}_{22}\rangle\Big)\mathbf{V}_{,22}\\
&+ \Big(\langle \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle\langle \mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle^{-1}\langle \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{13}\rangle - \langle \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{13}\rangle + \langle \mathbf{A}_{23}\rangle\Big)\mathbf{V}_{,23}\\
&+ \Big\{\Big(\langle \mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle\langle \mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle^{-1}\langle \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\rangle - \langle \mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\rangle + \langle \mathbf{A}_{32}\rangle\Big)\mathbf{V}_{,2}\Big\}_{,3}\\
&+ \Big\{\Big(\langle \mathbf{A}_{33}\rangle + \langle \mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle\langle \mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle^{-1}\langle \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{13}\rangle - \langle \mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{13}\rangle\Big)\mathbf{V}_{,3}\Big\}_{,3}\\
&+ \Big(\langle \mathbf{B}\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle\langle \mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle^{-1} + \langle \mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle^{-1}\langle \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{14}\rangle\Big)\mathbf{V}_{,1} + \Big(\langle \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle\langle \mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle^{-1}\langle \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{14}\rangle\\
&- \langle \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{14}\rangle + \langle \mathbf{A}_{24}\rangle + \langle \mathbf{B}\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle\langle \mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle^{-1}\langle \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\rangle - \langle \mathbf{B}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\rangle + \langle \mathbf{G}\rangle\Big)\mathbf{V}_{,2}\\
&+ \Big(\langle \mathbf{D}\rangle + \langle \mathbf{B}\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle\langle \mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle^{-1}\langle \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{13}\rangle - \langle \mathbf{B}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{13}\rangle\Big)\mathbf{V}_{,3}\\
&+ \Big\{\Big(\langle \mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle\langle \mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle^{-1}\langle \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{14}\rangle - \langle \mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{14}\rangle + \langle \mathbf{A}_{34}\rangle\Big)\mathbf{V}\Big\}_{,3}\\
&+ \Big(\langle \mathbf{E}\rangle + \langle \mathbf{B}\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle\langle \mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle^{-1}\langle \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{14}\rangle - \langle \mathbf{B}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{14}\rangle\Big)\mathbf{V} + \langle \mathbf{F}\rangle = 0.
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

Điều kiện liên tục trên các mặt phẳng L^*: $x_3 = 0$ và $x_3 = -A$:

$$
\begin{aligned}
&[\,\mathbf{V}\,]_{L^*} = 0,\\
&\Big[\Big(\langle \mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle\langle \mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle^{-1}\langle \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{14}\rangle - \langle \mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{14}\rangle + \langle \mathbf{A}_{34}\rangle\Big)\mathbf{V}+\\
&\langle \mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle\langle \mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle^{-1}\mathbf{V}_{,1}\\
&\quad+ \Big(\langle \mathbf{A}_{32}\rangle + \langle \mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle\langle \mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle^{-1}\langle \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\rangle - \langle \mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\rangle\Big)\mathbf{V}_{,2}\\
&\quad+ \Big(\langle \mathbf{A}_{33}\rangle + \langle \mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle\langle \mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle^{-1}\langle \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{13}\rangle - \langle \mathbf{A}_{31}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{13}\rangle\Big)\mathbf{V}_{,3}\Big]_{L^*} = 0.
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

2.2.4. Các phương trình thuần nhất hóa dạng hiện dạng thành phần cho vật liệu đàn hồi xốp trực hướng

Đối với vật liệu đàn hồi xốp trực hướng, ta có: $c_{k4} = c_{k5} = c_{k6} = 0,\ k = 1,2,3,\ \ c_{45} = c_{46} = c_{56} = 0,\ \alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{23} = 0,\ \ k_{12} = k_{13} = k_{23} = 0$. Từ (2.15), ta nhận được các ma trận $\mathbf{A}_{hk}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$. Thay các ma trận này vào phương trình thuần nhất hóa dạng (2.20),(2.21) và điều kiện liên tục (2.22) ta sẽ thu được các phương trình thuần nhất hóa dạng hiện dạng thành phần.

2.3. Kết luận

Trong chương này, các *phương trình thuần nhất hóa dạng hiện của lý thuyết đàn hồi xốp* có biên phân chia độ nhám cao trong *miền hai chiều theo mô hình Auriault* và trong *miền ba chiều theo mô hình Biot* được thiết lập bằng cách sử dụng các kỹ thuật cơ bản của phương pháp thuần nhất hóa. Các kết quả chính của chương 2 đã được công bố trên 01 bài báo quốc tế uy tín, 01 bài báo quốc gia uy tín.

Pham Chi Vinh, Do Xuan Tung, Nguyen Thi Kieu, (2018), "Homogenization of very rough two-dimensional interfaces separating two dissimilar poroelastic solids with time-harmonic motions", *Mathematics and Mechanics of solids*, 24, (5), pp. 1349–1367.

Nguyen Thi Kieu, Pham Chi Vinh, Do Xuan Tung,(2019), "Homogenization of very rough three-dimensional interfaces for the poroelasticity theory with Biot's model", *Vietnam Journal of Mechanics, Vietnam Academy of Science and Technology*, Vol. 41, No. 3, pp. 273-285.

Chương 3

THUẦN NHẤT HÓA BIÊN PHÂN CHIA ĐỘ NHÁM CAO CỦA LÝ THUYẾT ĐÀN HỒI MICROPOLAR

Trong chương 3, các phương trình thuần nhất hóa dạng hiện của lý thuyết đàn hồi micropolar có biên phân chia độ nhám cao nằm giữa hai đường thẳng song song được thiết lập nhờ việc sử dụng các kỹ thuật của phương pháp thuần nhất hóa giống như đã trình bày trong chương 2.

3.1. Các phương trình cơ bản dạng ma trận

Xét vật đàn hồi micropolar, các phương trình chuyển động có dạng:

$$t_{ki,k} + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i, \quad m_{ki,k} + \varepsilon_{irs} t_{rs} + \rho l_i = \rho j \ddot{\phi}_i, \; i = 1, 2, 3 \tag{3.1}$$

trong đó t_{ki} là các thành phần của tensơ ứng suất, m_{ki} là các thành phần của tensơ ứng suất cặp, u_i là chuyển dịch, ϕ_i là các góc quay, ρ là mật độ khối lượng, j là quán tính micro, f_i là véctơ lực khối, l_i là véctơ cặp lực khối, ε_{irs} là ký hiệu Levi-Civita.

Các phương trình (3.1) có dạng ma trận là:

$$(\mathbf{A}_{11}\mathbf{u}_{,1} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{u}_{,2} + \mathbf{G}\mathbf{u})_{,1} + (\mathbf{A}_{21}\mathbf{u}_{,1} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{u}_{,2} + \mathbf{H}\mathbf{u})_{,2} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{,1} + \mathbf{D}\mathbf{u}_{,2} + \mathbf{E}\mathbf{u} + \mathbf{F} = \boldsymbol{\rho}\ddot{\mathbf{u}} \tag{3.2}$$

trong đó

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} \lambda+\kappa+2\mu & 0 & 0 \\ 0 & \kappa+\mu & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & \mu & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} \kappa+\mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+\kappa+2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\kappa & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.3}$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\kappa \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \kappa \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F} = [\rho f_1 \quad \rho f_2 \quad \rho l_3]^T, \quad \mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad \phi]^T, \; \boldsymbol{\rho} = \mathrm{diag}[\rho \quad \rho \quad \rho j].$$

3.2. Các điều kiện liên tục dạng ma trận

Xét vật thể đàn hồi micropolar đẳng hướng tuyến tính chiếm các miền hai chiều $\Omega^{(+)}$ và $\Omega^{(-)}$ của mặt phẳng x_1x_2 được phân chia bởi đường cong L. L có phương trình: $x_2 = h(y)$, $y = x_1/\epsilon$, $h(y)$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ 1 với giá trị nhỏ nhất là 0 và giá trị lớn nhất là H. Giả thiết ϵ nhỏ hơn nhiều so với H (và trong miền $0 < x_1 < \epsilon$ $(0 < y < 1)$, mỗi đường thẳng $x_2 = x_2^0 = \mathrm{const}$ $(0 < x_2^0 < H)$ giao với đường cong L tại đúng hai điểm.

Các tham số vật liệu λ, μ, κ, γ, ρ và j nhận các giá trị hằng số khác nhau trong miền $\Omega^{(+)}$ và $\Omega^{(-)}$:

$$\lambda,\ \mu,\ \kappa,\ \gamma,\ \rho,\ j = \begin{cases} \lambda^{(+)},\ \mu^{(+)},\ \kappa^{(+)},\ \gamma^{(+)},\ \rho^{(+)},\ j^{(+)} \text{ với } (x_1, x_2) \in \Omega^{(+)} \\ \lambda^{(-)},\ \mu^{(-)},\ \kappa^{(-)},\ \gamma^{(-)},\ \rho^{(-)},\ j^{(-)} \text{ với } (x_1, x_2) \in \Omega^{(-)} \end{cases} \tag{3.4}$$

Giả sử $\Omega^{(+)}$ và $\Omega^{(-)}$ gắn chặt với nhau dọc theo L, khi đó điều kiện liên tục là:

$$[\phi]_L = 0,\ [u_k]_L = 0,\ [t_{1k}n_1 + t_{2k}n_2]_L = 0,\ [m_{1k}n_1 + m_{2k}n_2]_L = 0,\ k = 1, 3 \tag{3.5}$$

Các điều kiện liên tục (3.5) được biểu diễn dưới dạng ma trận như sau:

$$[\mathbf{u}]_L = \mathbf{0},\ \Big[\big(\mathbf{A}_{11}\mathbf{u}_{,1} + \mathbf{A}_{21}\mathbf{u}_{,2} + \mathbf{G}\mathbf{u}\big)n_1\Big]_L + \Big[\big(\mathbf{A}_{12}\mathbf{u}_{,1} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{u}_{,2} + \mathbf{H}\mathbf{u}\big)n_2\Big]_L = 0. \tag{3.6}$$

Như vậy, *ta cần thuần nhất hóa phương trình cơ bản dạng ma trận (3.2) cùng các điều kiện liên tục dạng ma trận (3.6)* trong miền chứa biên phân chia độ nhám cao.

3.3. Phương trình thuần nhất hóa dạng ma trận

Ta có $\mathbf{u}(x_1, x_2, \epsilon, t) = \mathbf{U}(x_1, y, x_2, \epsilon, t)$ và biểu diễn $\mathbf{U}$ dưới dạng sau:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} = \mathbf{V} &+ \epsilon\left(\mathbf{N}^1\mathbf{V} + \mathbf{N}^{11}\mathbf{V}_{,1} + \mathbf{N}^{12}\mathbf{V}_{,2}\right) + \epsilon^2\Big(\mathbf{N}^2\mathbf{V} + \mathbf{N}^{21}\mathbf{V}_{,1} + \mathbf{N}^{22}\mathbf{V}_{,2} \\ &+ \mathbf{N}^{211}\mathbf{V}_{,11} + \mathbf{N}^{212}\mathbf{V}_{,12} + \mathbf{N}^{222}\mathbf{V}_{,22}\Big) + O(\epsilon^3) \end{aligned} \tag{3.7}$$

trong đó $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x_1, x_2, t)$, các ma trận 4×4 $\mathbf{N}^1$,..., $\mathbf{N}^{222}$ là các hàm của y, x_2, tuần hoàn theo y với chu kỳ 1 và được xác định sao cho phương trình (3.2) và điều kiện liên tục (3.6) thỏa mãn.

Thực hiện các kỹ thuật của phương pháp thuần nhất hóa ta thu được các phương trình thuần nhất hóa dạng hiện dạng ma trận sau:

Với $x_2 < 0$ và $x_2 > H$:

$$\begin{aligned} &\left(\mathbf{A}_{11}^{(\pm)}\mathbf{V}_{,1} + \mathbf{A}_{12}^{(\pm)}\mathbf{V}_{,2} + \mathbf{G}^{(\pm)}\mathbf{V}\right)_{,1} + \left(\mathbf{A}_{21}^{(\pm)}\mathbf{V}_{,1} + \mathbf{A}_{22}^{(\pm)}\mathbf{V}_{,2} + \mathbf{H}^{(\pm)}\mathbf{V}\right)_{,2} \\ &\qquad + \mathbf{B}^{(\pm)}\mathbf{V}_{,1} + \mathbf{D}^{(\pm)}\mathbf{V}_{,2} + \mathbf{E}^{(\pm)}\mathbf{V} + \mathbf{F}^{(\pm)} = \boldsymbol{\rho}^{(\pm)}\ddot{\mathbf{V}} \end{aligned} \tag{3.8}$$

lấy dấu $(+)$ ứng với miền $\Omega^{(+)}$, lấy dấu $(-)$ ứng với miền $\Omega^{(-)}$.

Với $0 < x_2 < H$:

$$\begin{aligned} &\langle\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle^{-1}\mathbf{V}_{,11} + \langle\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle^{-1}\langle\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\rangle\mathbf{V}_{,12} + \left(\langle\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle\langle\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle^{-1}\mathbf{V}_{,1}\right)_{,2} \\ &+ \Big\{\Big(\langle\mathbf{A}_{22}\rangle + \langle\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle\langle\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle^{-1}\langle\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\rangle - \langle\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\rangle\Big)\mathbf{V}_{,2}\Big\}_{,2} \\ &+ \Big(\langle\mathbf{B}\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle\langle\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle^{-1} + \langle\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle^{-1}\langle\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{G}\rangle\Big)\mathbf{V}_{,1} \\ &+ \Big(\langle\mathbf{D}\rangle + \langle\mathbf{B}\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle\langle\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle^{-1}\langle\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\rangle - \langle\mathbf{B}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\rangle\Big)\mathbf{V}_{,2} \\ &+ \Big\{\Big(\langle\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle\langle\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle^{-1}\langle\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{G}\rangle - \langle\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{G}\rangle + \langle\mathbf{H}\rangle\Big)\mathbf{V}\Big\}_{,2} \\ &+ \Big(\langle\mathbf{E}\rangle + \langle\mathbf{B}\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle\langle\mathbf{A}_{11}^{-1}\rangle^{-1}\langle\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{G}\rangle - \langle\mathbf{B}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{G}\rangle\Big)\mathbf{V} + \langle\mathbf{F}\rangle = \langle\boldsymbol{\rho}\rangle\ddot{\mathbf{V}} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Điều kiện liên tục trên đường thẳng $L^*: \ x_2 = 0, \ x_2 = H$ là:

$$
\begin{aligned}
&[\mathbf{V}]_{L^*} = 0, \\
&\Big[\left(\mathbf{A}_{21}\mathbf{N}^1_{,y} + \mathbf{H}\right)\mathbf{V} + \mathbf{A}_{21}\left(\mathbf{N}^{11}_{,y} + \mathbf{I}\right)\mathbf{V}_{,1} + \left(\mathbf{A}_{21}\mathbf{N}^{12}_{,y} + \mathbf{A}_{22}\right)\mathbf{V}_{,2}\Big]_{L^*} = 0,
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

3.4. Phương trình thuần nhất hóa dạng thành phần

Thay các ma trận $\mathbf{A}_{hk}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ trong (3.3) vào các phương trình thuần nhất hóa (3.8), (3.9) và điều kiện liên tục (3.10) ta sẽ thu được các phương trình thuần nhất hóa và điều kiện liên tục dạng thành phần.

3.5. Kết luận

Sử dụng các kỹ thuật cơ bản của phương pháp thuần nhất hóa, các phương trình thuần nhất hóa dạng hiện và điều kiện liên tục tương ứng của môi trường đàn hồi đẳng hướng micropolar được thiết lập. Kết quả chính của chương 3 được công bố trong 01 bài báo quốc tế uy tín.

P.C. Vinh, V.T.N. Anh, D.X. Tung, N.T. Kieu, Homogenization of very rough interfaces for the micropolar elasticity theory. *Applied Mathematical Modelling* 2018; 54, pp. 467-482.

Chương 4

ỨNG DỤNG CỦA CÁC PHƯƠNG TRÌNH THUẦN NHẤT HÓA DẠNG HIỆN CHO BÀI TOÁN PHẢN XẠ, KHÚC XẠ

Trong chương này, ta sử dụng các phương trình thuần nhất hóa dạng hiện đã được thiết lập để khảo sát bài toán phản xạ, khúc xạ của sóng. Theo ý nghĩa của phương pháp thuần nhất hóa, bài toán phản xạ, khúc xạ của sóng đối với biên phân chia có độ nhám cao được đưa về bài toán phản xạ, khúc xạ đối với lớp vật liệu không thuần nhất.

4.1. Sóng ngang, sóng dọc

Sóng ngang là sóng mà có phương chuyển dịch **d** của các phần tử vật chất vuông góc với phương truyền sóng **p**. Có hai loại sóng ngang là sóng SV (Shear Vertical) và sóng SH (Shear Horizontal).

Sóng SV có phương chuyển dịch $\mathbf{d}_{SV}$ và phương truyền sóng **p** cùng nằm trong mặt phẳng thẳng đứng (mặt phẳng xảy ra trạng thái biến dạng phẳng).

Sóng SH có phương chuyển dịch $\mathbf{d}_{SH}$ nằm trong mặt phẳng nằm ngang.

Sóng dọc (sóng chuyển dịch dọc) là sóng có phương chuyển dịch **d** cùng phương với phương truyền sóng **p**.

Trong luận án ta nghiên cứu sự phản xạ, khúc xạ của sóng SH đối với môi trường đàn hồi, đàn hồi xốp và sóng chuyển dịch dọc trong môi trường đàn hồi micropolar.

4.2. Sự phản xạ, khúc xạ của sóng SH đối với biên phân chia độ nhám cao trong môi trường đàn hồi đẳng hướng

4.2.1. Đặt bài toán

Xét vật thể đàn hồi tuyến tính chiếm các miền hai chiều $\Omega^{(+)}, \Omega^{(-)}$ của mặt phẳng x_1x_3 được phân chia bởi đường cong L dao động giữa hai đường thẳng $x_3 = 0$ và $x_3 = h$, h là độ cao của biên phân chia. Đường cong L được biểu diễn bởi phương trình $x_3 = l(y), y = x_1/\epsilon$, trong đó $l(y)$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ 1. Giả sử rằng $0 < \epsilon/h << 1$, đường cong L là biên phân chia độ nhám cao. Giả thiết thêm rằng trong miền $0 < x_1 < \epsilon$ $(0 < y < 1)$, mọi đường thẳng $x_3 = x_3^0 = \text{const}$ $(0 < x_3^0 < h)$ giao với đường cong L tại đúng hai điểm. Nghĩa là trong khoảng $0 < y < 1$ phương trình $l(y) = x_3$ đối với biến y có đúng hai nghiệm được ký hiệu là $y_1(x_3)$ và $y_2(x_3)$ $(0 < y_1(x_3) < y_2(x_3) < 1)$.

Bài toán đặt ra là: *khảo sát sự phản xạ, khúc xạ của sóng SH đối với biên phân chia độ nhám cao L.* Theo ý nghĩa của phương pháp thuần nhất hóa, bài toán này được đưa về bài toán phản xạ, khúc xạ của sóng SH đối với lớp FGM. Đây là bài toán đã được các tác giả Vinh, P.C., Tuan, T.T. và Capistran, M.A. nghiên cứu vào năm 2015.

4.2.2. Công thức hiển của hệ số phản xạ, khúc xạ

Theo Vinh và các cộng sự (Phần 2.3), hệ số phản xạ, khúc xạ R và T là:

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{\alpha_1\alpha_2 H_{21}^* + H_{12}^* + i\Big(\alpha_1 H_{11}^* - \alpha_2 H_{22}^*\Big)}{\alpha_1\alpha_2 H_{21}^* - H_{12}^* + i\Big(\alpha_1 H_{11}^* + \alpha_2 H_{22}^*\Big)}, \\
T &= \frac{2i\alpha_1}{\alpha_1\alpha_2 H_{21}^* - H_{12}^* + i\Big(\alpha_1 H_{11}^* + \alpha_2 H_{22}^*\Big)}
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

trong đó $\alpha_1 = \mu^{(+)}k^{(+)}\cos\theta_1$, $\alpha_2 = \mu^{(-)}k^{(-)}\cos\theta_2$ và các đại lượng H_{ij}^* xem trong luận án toàn văn.

4.2.3. Sự phụ thuộc của các hệ số phản xạ, khúc xạ vào góc tới và dạng biên phân chia

Từ các khảo sát số sự phụ thuộc của các hệ số phản xạ, khúc xạ vào góc tới, dạng biên phân chia, ta nhận thấy:

(i) Mô đun $|R|$ và $|T|$ phụ thuộc mạnh vào góc tới.

(ii) Độ rộng của răng lược ảnh hưởng rõ đến mô đun $|R|$ của hệ số phản xạ với sự thay đổi khoảng 60%, nhưng không ảnh hưởng nhiều đến mô đun $|T|$ của hệ số khúc xạ.

(iii) Mô đun $|T|$ phụ thuộc ít vào dạng biên phân chia, trong khi đó mô đun $|R|$ phụ thuộc đáng kể vào dạng biên phân chia.

4.2.4. Band gap của sóng SH đối với biên phân chia độ nhám cao

Trong phần này, ta thấy rằng biên phân chia độ nhám cao dạng hình lược với độ rộng của răng lược biến thiên tuần hoàn có thể tạo ra band-gap (Band-gap được xem như một dải tần số với mô đun $|T|$ của hệ số khúc xạ nhỏ hơn 10^{-3}) với điều kiện số chu kỳ của răng lược và biên độ của độ rộng răng lược tuần hoàn là đủ lớn. Độ rộng và vị trí của band-gap phụ thuộc nhiều vào sự chênh lệch về độ cứng của hai bán không gian, biên độ của sự biến thiên độ rộng của răng lược, góc tới của sóng SH và số chu kỳ của răng lược.

4.3. Sự phản xạ, khúc xạ của sóng SH đối với biên phân chia độ nhám cao trong môi trường đàn hồi xốp trực hướng

Trong phần này, ta xét sự phản xạ, khúc xạ của sóng SH ($u_1 \equiv u_3 \equiv p \equiv 0, u_2 \neq 0$) đối với biên phân chia độ nhám cao dạng hình lược phân chia hai bán không gian đàn hồi xốp trực hướng. Theo ý nghĩa của phương pháp thuần nhất hóa, bài toán được đưa về sự phản xạ, khúc xạ của sóng SH ($V_1 \equiv V_3 \equiv P \equiv 0, V_2 \neq 0$) đối với lớp vật liệu thuần nhất trong miền $-A \leq x_3 \leq 0$. Các công thức tính hệ số phản xạ, khúc xạ được tính như sau:

$$R = \frac{pr - sn}{mr - qn}, \ \ T = \frac{ms - pq}{mr - qn} \tag{4.2}$$

với

$$\begin{aligned} m &= a_1 \mathrm{e}^{-(\hat{A}_3 + i\hat{P}_3)A} + a_2 \mathrm{e}^{(\hat{A}_3 + i\hat{P}_3)A}, \ n = -2\mathrm{e}^{(A_{3T} + iP_{3T})A}, \\ p &= -\{a_2 \mathrm{e}^{-(\hat{A}_3 + i\hat{P}_3)A} + a_1 \mathrm{e}^{(\hat{A}_3 + i\hat{P}_3)A}\}, \ q = a_1 \mathrm{e}^{-(\hat{A}_3 + i\hat{P}_3)A} - a_2 \mathrm{e}^{(\hat{A}_3 + i\hat{P}_3)A}, \\ r &= 2\frac{c_{44}^{(-)}(A_{3T} + iP_{3T})}{\langle c_{44}\rangle(\hat{A}_3 + i\hat{P}_3)} \mathrm{e}^{(A_{3T} + iP_{3T})A}, \ s = -\{a_2 \mathrm{e}^{-(\hat{A}_3 + i\hat{P}_3)A} - a_1 \mathrm{e}^{(\hat{A}_3 + i\hat{P}_3)A}\}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

4.3.1. Sự phụ thuộc của các hệ số phản xạ, khúc xạ vào một số tham số

Sau khi khảo sát số sự phụ thuộc của các hệ số phản xạ, khúc xạ của sóng SH theo góc tới, độ nhám, ...ta nhận thấy:

(i) Biên phân chia độ nhám cao làm cho hệ số phản xạ ($|R|$) giảm và hệ số khúc xạ ($|T|$) tăng.

(ii) Các hệ số phản xạ, khúc xạ phụ thuộc mạnh vào góc tới $\theta \, (0 \leq \theta < 90^0)$.

(iii) Hệ số phản xạ tăng và hệ số khúc xạ giảm khi độ rộng của răng lược tăng.

(iv) Với các giá trị nhỏ của $\varepsilon_2 = c_{44}^{(-)}/c_{44}^{(+)}$ hệ số phản xạ trở nên rất nhỏ còn hệ số khúc xạ lại rất lớn, nghĩa là trong trường hợp này sự phản xạ dường như không tồn tại.

(v) Khi $\varepsilon_4 = \omega^2 \rho^{(+)} A^2 / c_{44}^{(+)}$ tăng làm cho hệ số phản xạ giảm mạnh và hệ số khúc xạ tăng mạnh, nghĩa là với tần số cao, hệ số phản xạ trở nên nhỏ và hệ số khúc xạ lớn.

4.4. Sự phản xạ, khúc xạ của sóng có chuyển dịch dọc đối với biên phân chia độ nhám cao trong môi trường đàn hồi micropolar đẳng hướng

4.4.1. Đặt bài toán

Xét vật thể đàn hồi micropolar đẳng hướng tuyến tính chiếm các miền hai chiều $\Omega^{(+)}$ và $\Omega^{(-)}$ của mặt phẳng x_1x_2 được phân chia bởi đường cong L. L có phương trình: $x_2 = h(y)$, $y = x_1/\epsilon$, $h(y)$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ 1 với giá trị nhỏ nhất là 0 và giá trị lớn nhất là H. Giả thiết ϵ nhỏ hơn nhiều so với H và trong miền $0 < x_1 < \epsilon$ $(0 < y < 1)$, mỗi đường thẳng $x_2 = x_2^0 = \text{const}$ $(0 < x_2^0 < H)$ giao với đường cong L tại đúng hai điểm.

Bài toán đặt ra là: khảo sát sự phản xạ, khúc xạ của sóng có chuyển dịch dọc đối với biên phân chia độ nhám cao L giữa hai bán không gian đàn hồi micropolar đẳng hướng.

4.4.2. Sóng tới

Cho sóng phẳng chuyển dịch dọc với biên độ đơn vị, góc tới θ_0 $(0 < \theta_0 < \pi/2)$, số sóng k_0, vận tốc pha v_0, lan truyền trong bán không gian $\Omega^{(+)}$. Khi đó, các dịch chuyển cơ học V_{1I}, V_{2I} và chuyển dịch quay Φ_I có dạng:

$$\begin{aligned} &V_{1I} = U_{1I}(z)\mathrm{e}^{ik(x_1-ct)},\ \ V_{2I} = U_{2I}(z)\mathrm{e}^{ik(x_1-ct)}, \\ &\Phi_I = k\Xi_I(z)\mathrm{e}^{ik(x_1-ct)}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

trong đó $z = kx_2$, $k = k_0\sin\theta_0$, $c = \dfrac{v_0}{\sin\theta_0}$, $U_{1I}(z) = \sin\theta_0\mathrm{e}^{iz\cot\theta_0}$, $U_{2I}(z) = \cos\theta_0\mathrm{e}^{iz\cot\theta_0}$, $\Xi_I(z) \equiv 0$

4.4.3. Biểu diễn Stroh của các bán không gian và lớp

Phương trình vi phân

$$\boldsymbol{\xi}^{'}(z) = i\mathbf{N}\boldsymbol{\xi}(z) \tag{4.5}$$

được gọi là biểu diễn Stroh, trong đó $\boldsymbol{\xi} = [U_1\ \ U_2\ \ \Xi\ \ T_1\ \ T_2\ \ M]^T$, dấu phẩy chỉ đạo hàm theo biến z và các thành phần của ma trận $\mathbf{N}$ xem trong luận án toàn văn. Biểu diễn này là công cụ cơ bản để nghiên cứu bài toán phản xạ, khúc xạ.

4.4.4. Các sóng phản xạ

Ba sóng phản xạ truyền trong bán không gian $\Omega^{(+)}$ là:

$$\mathbf{RW}_k = w_{kr}\boldsymbol{\xi}_{kr}e^{ip_k z}e^{ik(x_1-ct)},\ k = 1, 2, 3 \tag{4.6}$$

trong đó w_{kr} là các hằng số cần được xác định, $\boldsymbol{\xi}_{kr}$ là véctơ riêng tương ứng với giá trị riêng p_k của ma trận $\mathbf{N}$.

4.4.5. Các sóng khúc xạ

Ba sóng khúc xạ truyền trong bán không gian $\Omega^{(-)}$ là:

$$\mathbf{TW}_k = w_{kt}\boldsymbol{\xi}_{kt}e^{iq_k z}e^{ik(x_1-ct)},\ k = 1, 2, 3 \tag{4.7}$$

trong đó w_{kt} là các hằng số cần được xác định, các véctơ riêng $\boldsymbol{\xi}_{kt}$ ứng với giá trị riêng q_k của ma trận $\mathbf{N}$.

4.4.6. Ma trận chuyển

Phương trình vi phân (4.5) có ma trận $\mathbf{N}$ là hàm của x_2. Ta sẽ tìm nghiệm xấp xỉ của (4.5) bằng cách chia lớp vật liệu có độ dày H thành N lớp con. Sử dụng điều kiện liên tục trên $N+1$ biên ta có mối liên hệ giữa nghiệm của hai bán không gian:

$$\boldsymbol{\xi}^{(N)}(\varepsilon) = \mathbf{T}\boldsymbol{\xi}^{(1)}(0) \tag{4.8}$$

trong đó $\mathbf{T}$ là ma trận chuyển toàn cục, $\mathbf{T} = \mathbf{T}^{(N)} \ldots \mathbf{T}^{(1)}$ và các ma trận $\mathbf{T}^{(m)}$ là ma trận chuyển địa phương của lớp thứ m.

4.4.7. Các hệ số phản xạ, khúc xạ

Sử dụng điều kiện liên tục trên biên $z = 0$ và $z = \varepsilon$ ta thiết lập được công thức tính các hệ số phản xạ, khúc xạ như sau:

$$\begin{aligned} w_{kr}^* &= |w_{kr}\sqrt{\xi_{1kr}^2 + \xi_{2kr}^2}\,|, \\ w_{kt}^* &= |w_{kt}\sqrt{\xi_{1kt}^2 + \xi_{2kt}^2}\,|,\ k = 1, 2, 3 \end{aligned} \tag{4.9}$$

với $w_{kr}, w_{kt}, \xi_{1kr}, \xi_{2kr}, \xi_{1kt}, \xi_{2kt}$ được chỉ ra cụ thể trong luận án toàn văn.

4.4.8. Khảo sát số sự phụ thuộc của hệ số phản xạ, khúc xạ vào một số tham số

(i) Biên độ w_{1r}^* thay đổi khá nhỏ trong miền $[0^0 - 53^0]$ của góc tới, sau đó, nó tăng nhanh tới giá trị max tại góc 89^0. Trong khi đó, các biên độ w_{2r}^*, w_{3r}^* khá nhỏ so với biên độ w_{1r}^* trong khoảng $[50^0 - 89^0]$.

(ii) Biên độ w_{2t}^* rất nhỏ với mọi góc tới. Biên độ w_{1t}^* giảm trơn tru từ giá trị lớn nhất (tại 1^0) về giá trị nhỏ nhất (tại 89^0).

(iii) Biên độ w_{1r}^*, w_{2r}^* sẽ ổn định với các giá trị lớn hơn của ϵ trong khi đó, các biên độ này là không ổn định trong hình. Ta thấy biên độ w_{3r}^* là rất nhỏ với cả ba loại biên.

(iv) Biên độ w_{1t}^* là không đổi với cả ba loại biên và w_{3t}^* dao động với dạng biên hình lược và ổn định với hai dạng biên còn lại. Tương tự w_{3r}^*, w_{2t}^* khá nhỏ.

4.5. Kết luận

Trong chương này, các biểu thức của hệ số phản xạ, khúc xạ của sóng đối với biên phân chia độ nhám cao trong các môi trường đàn hồi, đàn hồi xốp trực hướng và đàn hồi đẳng hướng micropolar được thiết lập. Sử dụng các biểu thức này để khảo sát số sự phụ thuộc của các hệ số phản xạ, khúc xạ của sóng vào một số tham số như góc tới, tần số,...Các kết quả chính của chương 4 đã được công bố trong 03 bài báo quốc tế uy tín:

Pham Chi Vinh, Tran Thanh Tuan, Do Xuan Tung, Nguyen Thi Kieu, (2017), "Reflection and transmission of SH waves at a very rough interface and its band gaps", *Sound and Vibration*, 411, pp. 422-434.

Pham Chi Vinh, Vu Thi Ngoc Anh, Do Xuan Tung, Nguyen Thi Kieu, (2018), "Homogenization of very rough interfaces for the micropolar elasticity theory". *Applied Mathematical Modelling*, 54, pp. 467-482.

Pham Chi Vinh, Do Xuan Tung, Nguyen Thi Kieu, (2018), "Homogenization of very rough two-dimensional interfaces separating two dissimilar poroelastic solids with time-harmonic motions", *Mathematics and Mechanics of solids*, 24, (5), pp. 1349–1367.

KẾT LUẬN

Các bài toán biên trong miền có biên phân chia độ nhám cao xuất hiện thường xuyên trong khoa học và công nghệ, và thường được giải bằng các phương pháp số. Tuy vậy, do độ nhám cao của biên phân chia, lời giải số thường không ổn định và độ chính xác không cao. Do vậy, thuần nhất hóa biên phân chia độ nhám cao để thay thế chúng bằng các biên phẳng cùng các phương trình thuần nhất hóa dạng hiện tương ứng là hết sức có ý nghĩa về cả phương diện lý thuyết và ứng dụng thực tiễn. Khi đó, nghiệm của các bài toán biên trong miền có biên phân chia độ nhám cao có thể được tìm dưới dạng giải tích.

Luận án đã tiến hành thuần nhất hóa biên phân chia độ nhám cao dao động giữa hai đường thẳng (mặt phẳng) song song đối với hai lý thuyết: lý thuyết đàn hồi xốp và lý thuyết đàn hồi micropolar. Sử dụng các phương trình thuần nhất hóa dạng hiện thu được nghiên cứu sự phản xạ, khúc xạ của một số sóng phẳng đối với biên phân chia độ nhám cao.

Luận án đã thu được các kết quả mới sau:

- Tìm ra các phương trình thuần nhất hóa dạng hiện đối với biên phân chia độ nhám cao, nằm giữa hai đường thẳng song song, của các lý thuyết:

  - Lý thuyết đàn hồi xốp trong miền hai chiều theo mô hình của Auriault.
  - Lý thuyết đàn hồi xốp trong miền ba chiều theo mô hình của Biot.
  - Lý thuyết đàn hồi đẳng hướng micropolar trong miền hai chiều.

  Các phương thuần nhất hóa dạng hiện thu được sẽ là công cụ tiện lợi để giải quyết các bài toán cụ thể khác nhau liên quan đến biên phân chia độ nhám cao, tĩnh cũng như động của các vật liệu đàn hồi xốp, đàn hồi micropolar. Hai vật liệu này đang được sử dụng ngày càng nhiều trong các lĩnh vực khác nhau của công nghệ hiện đại.

- Tìm ra các công thức tính hệ số phản xạ, hệ số khúc xạ đối với biên phân chia độ nhám cao, nằm giữa giữa hai đường thẳng song song, của các sóng:

  - Sóng SH trong môi trường đàn hồi.
  - Sóng SH trong môi trường đàn hồi xốp.
  - Sóng chuyển dịch dọc trong môi trường đàn hồi micropolar.

  Các công thức hệ số phản xạ, hệ số khúc xạ thu được không chỉ dùng để đánh giá ảnh hưởng của biên phân chia lên sự phản xạ, khúc xạ của sóng, mà chúng còn là công cụ quan trọng để giải bài toán ngược: xác định các đặc trưng của biên phân chia khi biết các giá trị (đo được từ thực nghiệm) của hệ số phản xạ, khúc xạ.

- Phát hiện "dạng tương thích" của các phương trình cơ bản dạng ma trận với điều kiện liên tục trên biên phân chia.

  Dạng tương thích giúp việc giải bài toán trên nhân tuần hoàn đơn giản hơn và kết quả: các phương trình thuần nhất hóa thu được ngắn gọn hơn. "Dạng tương thích" được phát hiện trong luận án sẽ được sử dụng trong nhiều bài toán thuần nhất hóa biên phân chia độ nhám cao khác.

Các kết quả chính của luận án đã được công bố trên các 03 bài báo quốc tế uy tín (trong đó có 02 bài báo ISI uy tín, tính tại thời điểm đăng) và 01 bài báo quốc gia uy tín, là một đóng góp dù nhỏ nhưng có ý nghĩa đối với lĩnh vực thuần nhất hóa biên phân chia độ nhám cao nói riêng, lĩnh vực thuần nhất hóa nói chung.

Luận án mở ra một số vấn đề có thể tiếp tục nghiên cứu

- Mở rộng các kết quả cho trường hợp khi biên phân chia nằm giữa hai đường tròn đồng tâm.
- Tìm các phương trình thuần nhất hóa dạng hiện của các lý thuyết khác như: lý thuyết đàn-điện-xốp, lý thuyết đàn-nhiệt-từ, lý thuyết đàn-điện-từ,...
- Mở rộng các kết quả cho trạng thái ứng suất phẳng.
- Ứng dụng các kết quả thu được khảo sát các bài toán thực tế.
- Áp dụng phương pháp và các kỹ thuật trình bày trong luận án, tìm các phương trình thuần nhất hóa dạng hiện trong các miền có biên có độ nhám cao (khác biên phân chia) dao động nhanh giữa hai đường thẳng song song, giữa hai đường tròn đồng tâm.

Danh mục các công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án

[1]. Pham Chi Vinh, Tran Thanh Tuan, Do Xuan Tung, Nguyen Thi Kieu, (2017), "Reflection and transmission of SH waves at a very rough interface and its band gaps", *Sound and Vibration*, 411, pp. 422-434.

[2]. Pham Chi Vinh, Vu Thi Ngoc Anh, Do Xuan Tung, Nguyen Thi Kieu, (2018), "Homogenization of very rough interfaces for the micropolar elasticity theory". *Applied Mathematical Modelling*, 54, pp. 467-482.

[3]. Pham Chi Vinh, Do Xuan Tung, Nguyen Thi Kieu, (2018), "Homogenization of very rough two-dimensional interfaces separating two dissimilar poroelastic solids with time-harmonic motions", *Mathematics and Mechanics of solids*, 24, (5), pp. 1349–1367.

[4]. Nguyen Thi Kieu, Pham Chi Vinh, Do Xuan Tung,(2019), "Homogenization of very rough three-dimensional interfaces for the poroelasticity theory with Biot's model", *Vietnam Journal of Mechanics, Vietnam Academy of Science and Technology*, Vol. 41, No. 3, pp. 273-285.