

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

Lương Thế Thắng

SÓNG MẶT TRONG CÁC MÔI TRƯỜNG
KHÔNG NÉN ĐƯỢC

Chuyên ngành: Cơ học vật rắn

Mã số: 9440109.02

DỰ THẢO TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ CƠ HỌC

Hà Nội – 2021

Công trình được hoàn thành tại:

Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội.

Người hướng dẫn khoa học: 1. GS. TS. Phạm Chí Vĩnh

2. TS. Nguyễn Thị Khánh Linh

Phản biện 1:

.....

Phản biện 2:

.....

Phản biện 3:

.....

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng cấp Đại học Quốc gia
chấm luận án tiến sĩ

họp tại

vào hồi giờ ngày tháng năm 20

Có thể tìm hiểu luận án tại:

- Thư viện Quốc gia Việt Nam

- Trung tâm Thông tin - Thư viện, Đại học Quốc gia Hà Nội

MỞ ĐẦU

Tính thời sự của đề tài luận án

Sóng trong các môi trường đàn hồi như sóng Rayleigh, sóng Stoneley, sóng Scholte, sóng Lamb, sóng SH,... được quan tâm nghiên cứu từ lâu vì những ứng dụng to lớn của chúng trong nhiều lĩnh vực khác nhau của khoa học và công nghệ, như địa chấn học, dự báo động đất, âm học, khoa học vật liệu, công nghệ điện tử viễn thông,... Có một số lượng rất lớn các nghiên cứu đã được thực hiện theo chủ đề này. Google Scholar, một trong những công cụ tìm kiếm tài liệu khoa học mạnh nhất trên internet, cho chúng ta hơn một triệu đường link cho yêu cầu tìm kiếm "Rayleigh waves", như Voloshin đã viết.

Có một thực tế rất đáng chú ý là: trong hầu hết các nghiên cứu đã được thực hiện, môi trường đàn hồi được giả thiết là **nén được**. Có rất ít các nghiên cứu dành cho sóng truyền trong các môi trường đàn hồi **dị hướng không nén được**. Nguyên nhân là, để mô tả điều kiện không nén được cần sử dụng thêm một ẩn hàm mới, đó là áp suất thủy tĩnh. Kết quả, số ẩn cần tìm của bài toán động của lý thuyết đàn hồi không nén được nhiều hơn (một) so với số ẩn cần tìm của bài toán động đối với môi trường đàn hồi nén được.

Ngày nay, các vật liệu đàn hồi không nén được dị hướng như: vật liệu tựa cao su (rubber-like materials), vật liệu sinh học (biological materials) đang được sử dụng ngày càng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khoa học, công nghệ khác nhau. Do vậy, nghiên cứu tìm ra các đặc trưng truyền của các sóng trong các **môi trường đàn hồi không nén được dị hướng** có tính thời sự cao, hết sức có ý nghĩa khoa học và ứng dụng thực tiễn.

Mục tiêu của luận án

Tìm ra các phương trình tán sắc và công thức tỉ số H/V của các sóng (Rayleigh, Stoneley, Scholte, Lamb) trong môi trường không nén được dị hướng.

Đối tượng nghiên cứu

Sóng Rayleigh, sóng Stoneley, sóng Scholte và sóng Lamb.

Phạm vi nghiên cứu

Sóng phẳng và môi trường đàn hồi là tuyến tính.

Phương pháp nghiên cứu

- Phương pháp véc tơ phân cực.
- Phương pháp tích phân đầu.
- Phương pháp điều kiện biên hiệu dụng.
- Phương pháp giới hạn không nén được.

Cấu trúc của luận án

Chương 1. Tổng quan

Chương 2. Sóng Stoneley, sóng Scholte trong các bán không gian đàn hồi không nén được.

Chương 3. Sóng Rayleigh trong môi trường đàn hồi, đàn điện không nén được.

Chương 4. Sóng Lamb trong môi trường đàn hồi không nén được.

CHƯƠNG 1. TỔNG QUAN

Các bài toán truyền sóng trong các môi trường đàn hồi được quan tâm nghiên cứu từ lâu bởi các kết quả nghiên cứu của chúng là cơ sở lý thuyết cho rất nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khoa học công nghệ khác nhau như âm học, địa chấn học, khoa học dự báo động đất, khoa học vật liệu, xây dựng công trình, công nghệ truyền thông,... Các bài toán này vẫn đang thu hút sự quan tâm nghiên cứu mạnh mẽ của các nhà khoa học trên thế giới bởi các vật liệu mới, tức là các môi trường đàn hồi mới, đang được con người tạo ra một cách thường xuyên. Đã có một số lượng lớn (huge numer) các nghiên cứu được tiến hành cho hướng nghiên cứu này. Để thấy được điều này, chỉ cần gửi yêu cầu tìm kiếm "Rayleigh waves", Google Scholar, một trong những công cụ tìm kiếm tài liệu khoa học mạnh nhất trên internet, sẽ cung cấp hơn một triệu đường link cho người tìm kiếm, như đã chia sẻ bởi Voloshin. Các kết quả thu được của chủ đề này rất phong phú và đã được tổng kết trong các sách chuyên khảo về sóng trong các môi trường đàn hồi, chẳng hạn bởi Ewing, Achenbach, Brekhovskikh, Nayfeh, Rose.

Có một điều đáng chú ý là: trong hầu hết các nghiên cứu dành cho sóng truyền trong các môi trường đàn hồi dị hướng, môi trường được giả thiết là **nén được**. Có rất ít các nghiên cứu dành cho sóng truyền trong các môi trường đàn hồi **không nén được dị hướng**.

1.1. Giới thiệu sóng Rayleigh

Sóng Rayleigh là sóng cơ lan truyền trong một bán không gian đàn hồi tự do đối với ứng suất. Năng lượng của sóng tập trung trên bề mặt của bán không gian và giảm rất nhanh theo chiều sâu (hầu như bằng không ở độ sâu một bước sóng). Do vậy sóng Rayleigh là sóng mặt (surface wave). Sự tồn tại của sóng Rayleigh được chứng minh đầu tiên bởi Rayleigh vào năm 1885, cho trường hợp đơn giản nhất khi bán không gian đàn hồi là đẳng hướng nén được.

Các nghiên cứu về sóng Rayleigh trong môi trường đàn hồi dị hướng không nén được

Sóng Rayleigh truyền trong bán không gian đàn hồi trục hướng không nén được, tự do đối với ứng suất, được nghiên cứu bởi Destrade, Ogden và Vinh. Sóng Rayleigh truyền trong bán không gian đàn hồi monoclinic với mặt phẳng đối xứng $x_3 = 0$, không nén được, chịu điều kiện biên trở kháng, được nghiên cứu bởi Vinh và Hue.

Sóng Rayleigh trong bán không gian đàn hồi trục hướng phủ một lớp *mỏng* đàn hồi trục hướng được nghiên cứu bởi Vinh và các cộng sự, Vinh và Anh Ít nhất lớp và bán không gian được giả thiết là không nén được.

Sóng Rayleigh trong bán không gian đàn hồi trục hướng phủ một lớp đàn hồi trục hướng *có độ dày bất kỳ* được nghiên cứu bởi Vinh và

các cộng sự, Vinh và Anh. Ít nhất lớp và bán không gian được giả thiết là không nén được.

Từ các phân tích trên có thể thấy rằng:

- Đối với sóng Rayleigh truyền trong bán không gian đàn hồi không nén được, phương trình tán sắc chỉ mới tìm được cho đến vật liệu monoclinic với mặt phẳng đối xứng $x_3 = 0$.

- Đối với sóng Rayleigh truyền trong bán không gian đàn hồi phủ một lớp đàn hồi (trong đó ít nhất lớp hoặc bán không gian là không nén được), phương trình tán sắc chỉ mới được tìm ra cho đến trường hợp trục hướng.

- Đối với các môi trường đàn hồi dị hướng không nén được phức tạp, như môi trường đàn điện, đàn-từ, đàn-điện-từ, đàn hồi micropolar, đàn hồi xoắn,... chưa có phương trình tán sắc nào của sóng Rayleigh được tìm ra.

1.2. Giới thiệu sóng Stoneley

Sóng Stoneley là sóng cơ học truyền dọc theo biên phân chia của hai bán không gian đàn hồi. Năng lượng của sóng tập trung chủ yếu ở vùng gần biên phân chia, giảm nhanh về hai phía của nó. Do vậy sóng Stoneley là sóng mặt. Sóng Stoneley được Stoneley nghiên cứu đầu tiên vào năm 1924 cho trường hợp khi cả hai bán không gian đàn hồi là đẳng hướng, cùng nén được và cùng không nén được, và chúng liên kết gắn chặt với nhau.

Các nghiên cứu về sóng Stoneley trong môi trường đàn hồi không nén được

Sóng Stoneley truyền dọc giữa hai bán không gian đàn hồi đẳng hướng khác nhau đã được khảo sát lần đầu tiên bởi Stoneley vào năm 1924. Vinh và cộng sự đã tìm ra công thức vận tốc sóng cho trường hợp khi hai bán không gian là đàn hồi đẳng hướng có các vận tốc sóng khối giống nhau. Sự truyền sóng Stoneley trong môi trường dị hướng đã được khảo sát bởi Stroh, Barnett và cộng sự.

Trong các nghiên cứu nói trên, các môi trường dị hướng được giả thiết là nén được. Như vậy chưa có một công trình nào nghiên cứu sự truyền của sóng Stoneley trong môi trường đàn hồi dị hướng không nén được.

1.3. Giới thiệu sóng Scholte

Sóng Scholte là sóng mặt truyền dọc biên phân chia giữa bán không gian chất lỏng và bán không gian chất rắn và năng lượng của sóng tắt dần theo hai phương vuông góc với mặt phân cách. Cũng như sóng Rayleigh và sóng Stoneley, sóng Scholte cũng là sóng mặt. Sóng Scholte truyền trong bán không gian đàn hồi đẳng hướng nén được nằm dưới bán không gian chất lỏng lý tưởng (không nhớt) được Scholte nghiên cứu năm 1949. Tác giả đã tìm ra phương trình tán sắc của sóng bằng phương pháp truyền thống.

Các nghiên cứu về sóng Scholte trong môi trường đàn hồi không nén được

Đối với sóng Scholte, Scholte tìm ra phương trình tán sắc trong môi trường đàn hồi đẳng hướng nén được. Destrade tìm ra phương trình tán sắc cho môi trường monoclinic $x_3 = 0$ nén được nhưng biểu diễn qua hằng số đàn hồi mềm (s_{ij}).

Nhưng chưa có nghiên cứu nào được thực hiện dành cho sóng Scholte trong môi trường đàn hồi dị hướng không nén được.

1.4. Giới thiệu sóng Lamb

Sóng Lamb là sóng phẳng truyền trong các cấu trúc bản hoặc vỏ. Sóng này được phát hiện đầu tiên (1917) bởi Horce Lamb.

Các nghiên cứu về sóng Lamb trong môi trường đàn hồi không nén được

Sóng Lamb trong các bản đẳng hướng lần đầu tiên được nghiên cứu bởi Horace Lamb. Sóng Lamb trong các bản dị hướng được nghiên cứu bởi Abubakar , Baylis và Green, Kaplunov và cộng sự, Kossovich và cộng sự cho các vật liệu đẳng hướng ngang, của Solie và Auld, Baid và cộng sự cho vật liệu trục hướng, của Nayfeh và Chimenti, Shuvalov, Kuznetsov đối với các vật liệu dị hướng nói chung.

Sóng Lamb trong các bản nhiều lớp đã được nghiên cứu bởi Jones, Yao-Jun và cộng sự, Demcenko và Mazeika cho các tấm đẳng hướng, của Liu và cộng sự, Nayfeh, Verma cho dị hướng. Trong tất cả các nghiên cứu trên, các lớp được giả định là nén được. Đối với trường hợp tương đối ít lớp, cách tiếp cận trực tiếp là thích hợp và các phương trình tán sắc thu được dưới dạng hình thức.

Từ phân tích trên ta thấy, trong các nghiên cứu nêu trên có duy nhất 1 công trình dành cho sóng Lamb truyền trong bản đàn hồi đẳng hướng ngang không nén được. Như vậy có rất ít kết quả liên quan đến sóng Lamb trong các bản đàn hồi dị hướng không nén được.

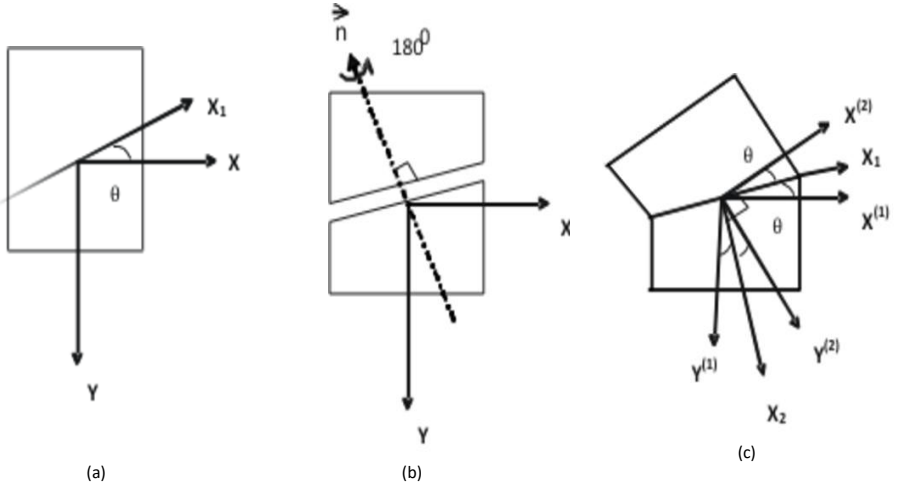
Chương 2. Sóng Stoneley, sóng Scholte trong bán không gian đàn hồi không nén được

Mục tiêu của Chương 2 là "tìm ra các phương trình tán sắc dạng hiện của sóng Stoneley và sóng Scholt trong các bán không gian đàn hồi trục hướng nén được và không nén được" bằng cách sử dụng phương pháp điều kiện biên hiệu dụng, phương pháp tích phân đầu và phương pháp lấy giới hạn.

2.1. Sóng Stoneley trong các tinh thể xoắn không nén được

Đặt bài toán

Để nghiên cứu bài toán, ta đưa vào hệ tọa độ Đécác vuông góc $OX_1X_2X_3$ chung cho cả hai bán không gian như mô tả trên hình. Chú



Hình 1: Tinh thể xoắn được tạo ra bằng cách cắt (a), quay (b) và gắn chặt (c) các tinh thể trực hướng

ý rằng hệ $OX_1X_2X_3$ nhận được từ hệ $OX^{(1)}Y^{(1)}Z$ ($OX^{(2)}Y^{(2)}Z$) bằng phép quay một góc θ ($-\theta$) quanh trục OZ . Chú ý rằng các đại lượng của bán không gian trên $X_2 \leq$ được phân biệt bằng dấu *.

Xét bài toán truyền sóng Stoneley trong môi trường không nén được với những tinh thể bị xoắn nói trên. Mục tiêu của chúng ta là tìm ra phương trình tán sắc của sóng.

Xét một lớp trực hướng có độ dày là h chiếm miền không gian $-h \leq x_2 \leq 0$. Xét bài toán truyền sóng của sóng mặt Rayleigh truyền theo hướng x_1 với vận tốc sóng c , số sóng k và tắt dần theo hướng x_2 . Ma trận (vuông cấp 4) \mathbf{T} được gọi là ma trận chuyển của lớp, nếu nó liên hệ các vector biên độ chuyển dịch-ứng suất tại hai đáy $x_2 = a$ và $x_2 = b$ bởi đẳng thức sau:

$$\bar{\xi}(a) = \mathbf{T}\bar{\xi}(b) \quad (1)$$

trong đó $\bar{\xi}(\cdot) = [\bar{U}_1(\cdot) \bar{U}_2(\cdot) \bar{\Sigma}_1(\cdot), \bar{\Sigma}_2(\cdot)]^T$ là vector biên độ chuyển dịch-ứng suất. Ma trận \mathbf{T} là ma trận chuyển cho lớp trực hướng nên được và nó có dạng

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{T}_3 & \mathbf{T}_4 \end{bmatrix} \quad (2)$$

với

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \frac{[\bar{\gamma}; \text{ch}\varepsilon]}{[\bar{\gamma}]} & \frac{-i[\bar{\beta}; \text{sh}\varepsilon]}{[\bar{\alpha}; \bar{\beta}]} \\ -i[\bar{\gamma}; \bar{\alpha}\text{sh}\varepsilon] & \frac{[\bar{\alpha}\text{ch}\varepsilon; \bar{\beta}]}{[\bar{\alpha}; \bar{\beta}]} \\ \frac{[\bar{\gamma}]}{[\bar{\gamma}]} & \frac{[\bar{\alpha}; \bar{\beta}]}{[\bar{\alpha}; \bar{\beta}]} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} \frac{-[\bar{\alpha}; \text{sh}\varepsilon]}{[\bar{\alpha}; \bar{\beta}]} & \frac{-i[\text{ch}\varepsilon]}{[\bar{\gamma}]} \\ -i\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2[\text{ch}\varepsilon] & \frac{-[\bar{\alpha}\text{sh}\varepsilon]}{[\bar{\gamma}]} \\ \frac{[\bar{\alpha}; \bar{\beta}]}{[\bar{\alpha}; \bar{\beta}]} & \frac{[\bar{\gamma}]}{[\bar{\gamma}]} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} \frac{-[\bar{\gamma}; \bar{\beta}\text{sh}\varepsilon]}{[\bar{\gamma}]} & \frac{-i\bar{\beta}_1\bar{\beta}_2[\text{ch}\varepsilon]}{[\bar{\alpha}; \bar{\beta}]} \\ -i\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2[\text{ch}\varepsilon] & \frac{[\bar{\beta}; \bar{\gamma}\text{sh}\varepsilon]}{[\bar{\alpha}; \bar{\beta}]} \\ \frac{[\bar{\gamma}]}{[\bar{\gamma}]} & \frac{[\bar{\alpha}; \bar{\beta}]}{[\bar{\alpha}; \bar{\beta}]} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_4 = \mathbf{T}_1^T,$$

trong đó $\varepsilon_n = \varepsilon\bar{b}_n$, $n = 1, 2$, $\varepsilon = kh$ và $[\text{ch}\varepsilon] = \text{ch}\varepsilon_2 - \text{ch}\varepsilon_1$, $[\bar{\alpha}\text{ch}\varepsilon] = \bar{\alpha}_2\text{ch}\varepsilon_2 - \bar{\alpha}_1\text{ch}\varepsilon_1$, $[\bar{\alpha}; \bar{\alpha}\text{sh}\varepsilon] = \bar{\alpha}_2\bar{\beta}_1\text{ch}\varepsilon_1 - \bar{\alpha}_1\bar{\beta}_2\text{sh}\varepsilon_2, \dots$ và các đại lượng $\bar{\alpha}_k$ và \bar{b}_k được cho bởi

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_k &= -\frac{(\bar{c}_{12} + \bar{c}_{66})\bar{b}_k}{\bar{c}_{22}\bar{b}_k^2 - \bar{c}_{66} + \bar{X}}, \quad k = 1, 2, \quad \bar{X} = \bar{\rho}c^2, \\ \bar{\beta}_k &= \bar{c}_{66}(\bar{b}_k - \bar{\alpha}_k), \quad \bar{\gamma}_k = \bar{c}_{12} - \bar{c}_{22}\bar{b}_k\bar{\alpha}_k, \quad k = 1, 2, \\ \bar{b}_1 &= \sqrt{\frac{\bar{S} + \sqrt{\bar{S}^2 - 4\bar{P}}}{2}}, \quad \bar{b}_2 = \sqrt{\frac{\bar{S} - \sqrt{\bar{S}^2 - 4\bar{P}}}{2}} \\ \bar{S} &= \frac{\bar{c}_{22}(\bar{c}_{11} - \bar{X}) + \bar{c}_{66}(\bar{c}_{66} - \bar{X}) - (\bar{c}_{12} + \bar{c}_{66})^2}{\bar{c}_{22}\bar{c}_{66}} \\ \bar{P} &= \frac{(\bar{c}_{11} - \bar{X})(\bar{c}_{66} - \bar{X})}{\bar{c}_{22}\bar{c}_{66}} \end{aligned} \quad (4)$$

Ma trận \mathbf{T} này sẽ được dùng để nhận được công thức tỷ số H/V.

2.2. Công thức tỷ số H/V của sóng mặt Rayleigh

Công thức tỷ số H/V của sóng mặt Rayleigh được tìm bằng kỹ thuật điều kiện biên hiệu dụng trong đó ảnh hưởng của lớp trục hướng sẽ được thay thế bằng một điều kiện biên thuần nhất trên mặt của bán không gian. Sau đó điều kiện biên này sẽ được dùng trong bài toán sóng mặt Rayleigh của mô hình chỉ gồm bán không gian và chúng ta có thể nhận được phương trình tán sắc và công thức tỷ số H/V của bài toán đối với mô hình một lớp đặt trên bán không gian.

2.2.1. Điều kiện biên hiệu dụng

Xét bán không gian trục hướng nén được nằm trong miền không gian $x_2 \geq 0$ được phủ một lớp mỏng trục hướng nén được với độ dày h nằm trong miền $-h \leq x_2 \leq 0$. Giả sử rằng lớp và bán không gian là gắn chặt và bề mặt của lớp ($x_2 = -h$) là tự do đối với ứng suất.

Áp dụng (1) với $a = -h$, $b = 0$ kết hợp với điều kiện tự do đối với ứng

suất tại $x_2 = -h$ của mặt trên của lớp $\bar{\sigma}_{12}(-h) = \bar{\sigma}_{22}(-h) = 0$, ta có

$$\mathbf{T}_3 \bar{\mathbf{U}}(0) + \mathbf{T}_4 \bar{\mathbf{\Sigma}}(0) = 0, \quad (5)$$

trong đó $\bar{\mathbf{\Sigma}}(\cdot) = [\bar{\Sigma}_1(\cdot) \bar{\Sigma}_2(\cdot)]^T$, $\bar{\mathbf{U}}(\cdot) = [\bar{U}_1(\cdot) \bar{U}_2(\cdot)]^T$.

Do liên kết giữa lớp và bán không gian là gắn chặt, chuyển vị và ứng suất liên tục tại mặt phân chia $x_2 = 0$ nên $\bar{\mathbf{U}}(0) = \mathbf{U}(0)$, $\bar{\mathbf{\Sigma}}(0) = \mathbf{\Sigma}(0)$. Do đó, từ phương trình (5), ta có

$$\mathbf{T}_3 \mathbf{U}(0) + \mathbf{T}_4 \mathbf{\Sigma}(0) = 0. \quad (6)$$

Phương trình (6) thể hiện ảnh hưởng của lớp lên bán không gian và được gọi là điều kiện biên hiệu dụng. Hơn nữa, từ phương trình (1) với $a = -h$, $b = 0$ và điều kiện liên tục tại $x_2 = 0$, ta có vector biên độ chuyển dịch tại mặt trên của lớp có dạng

$$\bar{\mathbf{U}}(-h) = \mathbf{T}_1 \mathbf{U}(0) + \mathbf{T}_2 \mathbf{\Sigma}(0). \quad (7)$$

Công thức này sẽ được dùng để đi tìm công thức tỷ số H/V.

2.2.2. Công thức tỷ số H/V

Xét sóng Rayleigh truyền trong mô hình bán không gian $x_2 \geq 0$ chịu ảnh hưởng bởi điều kiện biên (6).

Tỷ số H/V là tỷ số biên độ chuyển dịch theo phương ngang và phương thẳng đứng của phần tử tại bề mặt trên của lớp. Do đó, ta có

$$\chi := \left| \frac{\bar{U}_1(-h)}{\bar{U}_2(-h)} \right|. \quad (8)$$

Sau đó dùng một số phép biến đổi, ta nhận được công thức tỷ số H/V sau

$$\chi = \frac{A_0 + A_1 \text{ch}\varepsilon_1 \text{ch}\varepsilon_2 + A_2 \text{sh}\varepsilon_1 \text{sh}\varepsilon_2 + A_3 \text{ch}\varepsilon_1 \text{sh}\varepsilon_2 + A_4 \text{sh}\varepsilon_1 \text{ch}\varepsilon_2}{B_1 \text{ch}\varepsilon_1 \text{ch}\varepsilon_2 + B_2 \text{sh}\varepsilon_1 \text{sh}\varepsilon_2 + B_3 \text{ch}\varepsilon_1 \text{sh}\varepsilon_2 + B_4 \text{sh}\varepsilon_1 \text{ch}\varepsilon_2}, \quad (9)$$

trong đó

$$\begin{aligned} A_0 &= -\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 (\bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2) [\alpha] + (2\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 + \bar{\alpha}_2 \bar{\beta}_1 \bar{\gamma}_2 + \bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_2 \bar{\gamma}_1) [\beta] + \\ &\quad + (\bar{\alpha}_2 \bar{\beta}_1 + \bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_2) [\gamma; \beta], \\ A_1 &= -A_0 + [\bar{\alpha}; \bar{\beta}] [\bar{\gamma}] [\beta], \\ A_2 &= -(\bar{\beta}_2^2 \bar{\gamma}_1 + \bar{\beta}_1^2 \bar{\gamma}_2) [\alpha] + (\bar{\alpha}_2 \bar{\beta}_2 \bar{\gamma}_1 + \bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_1 \bar{\gamma}_2 + \bar{\beta}_1^2 + \bar{\beta}_2^2) [\beta] + \\ &\quad + (\bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_1 + \bar{\alpha}_2 \bar{\beta}_2) [\gamma; \beta], \\ A_3 &= \bar{\beta}_1 [\bar{\gamma}] [\alpha; \beta] - \bar{\beta}_2 [\bar{\alpha}; \bar{\beta}] [\gamma], \quad A_4 = -\bar{\beta}_2 [\bar{\gamma}] [\alpha; \beta] + \bar{\beta}_1 [\bar{\alpha}; \bar{\beta}] [\gamma], \end{aligned} \quad (10)$$

và

$$\begin{aligned} B_1 &= [\bar{\alpha}; \bar{\beta}] [\bar{\gamma}] [\alpha; \beta], \quad B_2 = [\bar{\alpha}; \bar{\beta}]^2 [\gamma], \\ B_3 &= [\bar{\alpha}; \bar{\beta}] [\bar{\beta}_2 \bar{\gamma}_1 - (\bar{\alpha}_2 \bar{\gamma}_1 + \bar{\beta}_2) [\alpha] - \bar{\alpha}_2 [\gamma; \beta]], \\ B_4 &= [\bar{\alpha}; \bar{\beta}] [-\bar{\beta}_1 \bar{\gamma}_2 + (\bar{\alpha}_1 \bar{\gamma}_2 + \bar{\beta}_1) [\alpha] + \bar{\alpha}_1 [\gamma; \beta]]. \end{aligned} \quad (11)$$

2.3.3. Trường hợp đẳng hướng

Bằng cách thực hiện một số biến đổi, công thức tỷ số H/V (9) có thể đưa về dạng công thức tỷ số H/V trong trường hợp đẳng hướng của Malischewsky và Scherbaum cho trường hợp vật liệu nén được.

$$\chi = f_{12} f_3 \quad (12)$$

trong đó

$$f_{12} = \frac{\bar{\beta}_2}{\bar{\gamma}_2 [\bar{\beta}; \bar{\alpha}]} \quad (13)$$

và

$$f_3 = \frac{\tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 \text{ch}\varepsilon_1 \text{ch}\varepsilon_2 + \tilde{A}_2 \text{sh}\varepsilon_1 \text{sh}\varepsilon_2 + \tilde{A}_3 \text{ch}\varepsilon_1 \text{sh}\varepsilon_2 + \tilde{A}_4 \text{sh}\varepsilon_1 \text{ch}\varepsilon_2}{\tilde{A}_4 \text{ch}\varepsilon_1 \text{ch}\varepsilon_2 + \tilde{A}_3 \text{sh}\varepsilon_1 \text{sh}\varepsilon_2 + \tilde{A}_2 \text{ch}\varepsilon_1 \text{sh}\varepsilon_2 + \tilde{A}_1 \text{sh}\varepsilon_1 \text{ch}\varepsilon_2} \quad (14)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \tilde{A}_0 &= \bar{\beta}_1 (-\bar{\beta}_2 \bar{\gamma}_2 [\alpha] + (\bar{\beta}_2 + \bar{\alpha}_2 \bar{\gamma}_2) [\beta] + \bar{\alpha}_2 [\gamma; \beta]), \\ \tilde{A}_1 &= \bar{\beta}_2 (\bar{\beta}_1 \bar{\gamma}_2 [\alpha] - (\bar{\beta}_1 + \bar{\alpha}_1 \bar{\gamma}_2) [\beta] - \bar{\alpha}_1 [\gamma; \beta]), \\ \tilde{A}_2 &= \bar{\beta}_2 (-\bar{\beta}_2 \bar{\gamma}_1 [\alpha] + (\bar{\beta}_2 + \bar{\alpha}_2 \bar{\gamma}_1) [\beta] + \bar{\alpha}_2 [\gamma; \beta]), \\ \tilde{A}_3 &= -\bar{\beta}_2 [\bar{\alpha}; \bar{\beta}] [\gamma], \quad \tilde{A}_4 = -\bar{\beta}_2 [\bar{\gamma}] [\alpha; \beta]. \end{aligned} \quad (15)$$

2.4. Tính toán minh họa số và bài toán ngược đánh giá tính chất cơ học của lớp trực hướng

Phương trình tán sắc và tỷ số H/V phụ thuộc vào 8 tham số không thứ nguyên đó là e_i , \bar{e}_i ($i = \bar{1}, \bar{3}$) và r_μ , r_ν . Để khảo sát số, ta xét các tham số thông qua các hằng số đàn hồi kỹ thuật bằng mối liên hệ

$$\alpha = \frac{c_{22}}{c_{11}} = \frac{\nu_{21}}{\nu_{12}}, \quad \delta = 1 - \frac{c_{12}^2}{c_{11} c_{22}} = 1 - \nu_{12} \nu_{21}, \quad \gamma = \frac{c_{66}}{c_{11}} = \delta \frac{G_{12}}{E_1} \quad (16)$$

trong đó ν_{12} và ν_{21} là các hệ số Poisson trong mặt phẳng (x_1, x_2) , G_{12} là modul cắt trong mặt phẳng (x_1, x_2) và E_1 là modul Young theo hướng x_1 . Từ đó, ta có mối liên hệ giữa tham số mới và tham số cũ của lớp và bán không gian như sau

$$\alpha = \frac{e_2}{e_1}, \quad \gamma = \frac{1}{e_1}, \quad \delta = 1 - \frac{e_3^2}{e_1 e_2}$$

và

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{\bar{e}_1 \bar{e}_2}, \bar{\gamma} = \frac{1}{\bar{e}_1}, \bar{\delta} = 1 - \frac{\bar{e}_2 \bar{e}_3^2}{\bar{e}_1}, \quad (17)$$

Xét mô hình một lớp vật liệu trục hướng đặt trên bán không gian đẳng hướng với các tham số cho như sau

$$\bar{\alpha} = 2, \alpha = 1, \bar{\gamma} = 0.0782, \gamma = 0.2368, \bar{\delta} = 0.5, \delta = 0.7228 \quad (18)$$

và tỷ số giữa khối lượng riêng và vận tốc sóng ngang giữa lớp và bán không gian là $r_d = \bar{\rho}/\rho = 0.7391$ và $r_s = \bar{c}_2/c_2 = 0.2473$.

Hình vẽ ?? biểu thị đường cong tán sắc và tỷ số H/V của mô hình kết quả của bài toán ngược khi áp dụng cho mô hình 1 ($\bar{\alpha} = 2$ và $\bar{\delta} = 0.5$). Trong trường hợp này, dữ liệu đầu vào giả định được thực hiện với nhiễu 5%. Thuật toán genetic trong MATLAB R2018a được dùng để tìm điểm cực tiểu toàn cục của hàm mục tiêu trong miền $1.5 \leq \bar{\alpha} \leq 2.5$ và $0.3 \leq \bar{\delta} \leq 0.7$. Đối với mô hình 1, ta thu được $\bar{\alpha}_{inv} = 2.0402$ và $\bar{\delta}_{inv} = 0.5002$ với sai số tương đối so với giá trị chính xác tương ứng là 2.1% và 0.1%. Khi sử dụng dữ liệu tỷ số H/V là dữ liệu đầu vào, bài toán ngược cho kết quả $\bar{\alpha}_{inv} = 2.0394$ và $\bar{\delta}_{inv} = 0.4963$ với sai số tương đối tương ứng là 2.0% và 0.7%. Ta có thể thấy rằng bài toán ngược cho kết quả với độ chính xác khá là giống nhau nhau khi sử dụng tỷ số H/V hoặc vận tốc làm giá trị đầu vào.

2.5. Kết luận chương

Trong chương này, bài toán truyền sóng Rayleigh trong lớp trục hướng nén được được phủ một lớp mỏng trục hướng nén được đã được nghiên cứu. Luận án đã thiết lập công thức chính xác của sóng Rayleigh bằng cách sử dụng ma trận chuyển cho lớp trục hướng nén được và kỹ thuật điều kiện biên hiệu dụng. Luận án thu được công thức tỷ số H/V dạng hiện và có thể chuyển về công thức của Malischewsky và Scherbaum cho trường hợp nén được. Một số tính toán số minh họa cho các bài toán ngược cho thấy rằng công thức nhận được của tỷ số H/V là công cụ tốt để đánh giá tính chất cơ học của lớp phủ trong bài toán ngược.

CHƯƠNG 3. Sóng Rayleigh trong môi trường đàn hồi, đàn điện không nén được

Trong các ứng dụng thực tế, có thể xảy ra ba khả năng còn lại: bán không gian nén được và lớp không nén được, bán không gian không nén được và lớp nén được và cả bán không gian và lớp đều không nén được. Do đó, cần tìm công thức chính xác dạng tường minh cho tỷ số H/V cho ba trường hợp không nén được này.

Mục đích chính của chương này là tìm ra các công thức chính xác dạng hiện cho tỷ số H/V cho các trường hợp không nén được:

- (i) Lớp trục hướng không nén được và bán không gian trục hướng nén được (trường hợp không nén được-nén được).
- (ii) Lớp là trục hướng nén được và bán không gian là trục hướng không nén được (trường hợp nén được-không nén được).
- (iii) Lớp và bán không gian đều là trục hướng, không nén được (trường hợp không nén được-không nén được).

0.0.1 Giới hạn không nén được

Xét vật rắn đàn hồi trục hướng có biến dạng phẳng:

$$u_1 = u_1(x_1, x_2, t), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2, t), \quad u_3 \equiv 0 \quad (19)$$

Khi đó, chúng ta có [?]:

Mệnh đề 1: Trong giới hạn không nén được, các mối liên hệ sau:

$$s'_{11} = \frac{1}{\delta}, \quad s'_{66} = \frac{1}{c_{66}}, \quad \delta = \frac{1}{s'_{11}}, \quad c_{66} = \frac{1}{s'_{66}} \quad (20)$$

ở đây c_{ij} và s'_{ij} là các hằng số đàn hồi độ cứng và độ mềm [?], tương ứng với vật liệu đàn hồi trục hướng, $\delta = c_{11} + c_{22} - 2c_{12}$.

Mệnh đề 2: Các biểu thức sau được rút ra:

$$\lim \Delta = 0, \quad \lim \Delta c_{11} = \lim \Delta c_{22} = \lim \Delta c_{12} = s'_{11}, \quad \lim \Delta c_{66} = 0 \quad (21)$$

ở đây $\Delta = s'_{11}s'_{22} - (s'_{12})^2$.

Chú ý rằng, đối với vật liệu đàn hồi trục hướng nén được có biến dạng phẳng (19), ta có:

$$\Delta = \frac{1}{D} \quad \text{với } D = c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0 \quad (22)$$

Chú ý 1:

- (i) Từ (21) dẫn đến: $\lim c_{ij} = \infty (i, j = 1, 2)$.
- (ii) Tuy nhiên, $\lim c_{11} + \lim c_{22} - 2\lim c_{12}$ là 1 số hữu hạn (dương), theo Mệnh đề 1 (chú ý rằng $0 < s'_{11} < +\infty$).

0.0.2 Công thức tỷ số H/V cho trường hợp nén được - nén được

Xét một bán không gian đàn hồi trục hướng nén được chiếm miền $x_2 \geq 0$ được phủ bởi một lớp đàn hồi trục hướng nén được với độ dày tùy ý h chiếm miền $-h \leq x_2 \leq 0$. Giả sử, liên kết giữa lớp và bán

không gian là gắn chặt và mặt trên của lớp, $x_2 = -h$, là tự do ứng suất. Chú ý rằng, các đại lượng liên quan đến bán không gian và lớp có cùng kí hiệu nhưng được phân biệt bởi dấu gạch ngang đối với lớp.

Xét sóng Rayleigh truyền theo hướng x_1 với vận tốc sóng $c(> 0)$, số sóng $k(> 0)$ và tắt dần theo hướng x_2 . Kí hiệu χ là tỷ số giữa chuyển dịch theo phương ngang và chuyển dịch theo phương dọc của sóng Rayleigh trên bề mặt của lớp: $\chi = u_1(-h)/u_2(-h)$, được gọi là "tỷ số H/V" hoặc "the ellipticity" [?], và nó được tính toán theo các công thức trong [?]:

• **Dạng I:**

$$\chi = f_{12}f_3 \quad (23)$$

ở đây:

$$f_{12} = \frac{\bar{\beta}_2[\bar{\gamma}]}{\bar{\gamma}_2[\bar{\beta}; \bar{\alpha}]} \quad (24)$$

và:

$$f_3 = \frac{A_0 + A_1 \text{ch}\varepsilon_1 \text{ch}\varepsilon_2 + A_2 \text{sh}\varepsilon_1 \text{sh}\varepsilon_2 + A_3 \text{ch}\varepsilon_1 \text{sh}\varepsilon_2 + A_4 \text{sh}\varepsilon_1 \text{ch}\varepsilon_2}{A_4 \text{ch}\varepsilon_1 \text{ch}\varepsilon_2 + A_3 \text{sh}\varepsilon_1 \text{sh}\varepsilon_2 + A_2 \text{ch}\varepsilon_1 \text{sh}\varepsilon_2 + A_1 \text{sh}\varepsilon_1 \text{ch}\varepsilon_2} \quad (25)$$

trong đó: $\text{ch}(\cdot) := \cosh(\cdot)$, $\text{sh}(\cdot) := \sinh(\cdot)$, các hệ số A_k ($k = 0, 1, 2, 3, 4$) được xác định như sau:

$$\begin{aligned} A_0 &= \bar{\beta}_1 (-\bar{\beta}_2 \bar{\gamma}_2 [\alpha] + (\bar{\beta}_2 + \bar{\alpha}_2 \bar{\gamma}_2) [\beta] + \bar{\alpha}_2 [\gamma; \beta]), \\ A_1 &= \bar{\beta}_2 (\bar{\beta}_1 \bar{\gamma}_2 [\alpha] - (\bar{\beta}_1 + \bar{\alpha}_1 \bar{\gamma}_2) [\beta] - \bar{\alpha}_1 [\gamma; \beta]), \\ A_2 &= \bar{\beta}_2 (-\bar{\beta}_2 \bar{\gamma}_1 [\alpha] + (\bar{\beta}_2 + \bar{\alpha}_2 \bar{\gamma}_1) [\beta] + \bar{\alpha}_2 [\gamma; \beta]), \\ A_3 &= -\bar{\beta}_2 [\bar{\alpha}; \bar{\beta}] [\gamma], \quad A_4 = -\bar{\beta}_2 [\bar{\gamma}] [\alpha; \beta] \end{aligned} \quad (26)$$

Trong phương trình (24) và (26): $\varepsilon_n = \varepsilon \bar{b}_n$ ($n = 1, 2$), $\varepsilon = kh$ và:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_n &= -\frac{(\bar{c}_{12} + \bar{c}_{66}) \bar{b}_n}{\bar{c}_{22} \bar{b}_n^2 - \bar{c}_{66} + \bar{X}} = -\frac{\bar{c}_{11} - \bar{\rho} c^2 - \bar{c}_{66} \bar{b}_n^2}{(\bar{c}_{12} + \bar{c}_{66}) \bar{b}_n}, \quad n = 1, 2, \quad \bar{X} = \bar{\rho} c^2, \\ \bar{b}_1 &= \sqrt{\frac{\bar{S} + \sqrt{\bar{S}^2 - 4\bar{P}}}{2}}, \quad \bar{b}_2 = \sqrt{\frac{\bar{S} - \sqrt{\bar{S}^2 - 4\bar{P}}}{2}}, \\ \bar{S} &= \frac{\bar{c}_{22}(\bar{c}_{11} - \bar{X}) + \bar{c}_{66}(\bar{c}_{66} - \bar{X}) - (\bar{c}_{12} + \bar{c}_{66})^2}{\bar{c}_{22} \bar{c}_{66}}, \\ \bar{P} &= \frac{(\bar{c}_{11} - \bar{X})(\bar{c}_{66} - \bar{X})}{\bar{c}_{22} \bar{c}_{66}}, \\ \bar{\beta}_n &= \bar{c}_{66}(\bar{b}_n - \bar{\alpha}_n), \quad \bar{\gamma}_n = \bar{c}_{12} + \bar{c}_{22} \bar{b}_n \bar{\alpha}_n, \quad n = 1, 2 \end{aligned} \quad (27)$$

dấu ngoặc vuông $[.]$ được định nghĩa như sau:

$$[f; g] := f_2g_1 - f_1g_2, [f] := f_2 - f_1 \quad (28)$$

và $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\gamma]$, $[\alpha; \beta]$ và $[\gamma; \beta]$ được xác định bởi:

$$\begin{aligned} [\alpha] &= (X - c_{11} - c_{66}b_1b_2), [\alpha; \beta] = c_{66}(c_{11} - X)(b_1 + b_2), \\ [\beta] &= [\alpha; \gamma] = c_{66}(c_{11} - X - c_{12}b_1b_2), [\gamma] = c_{22}c_{66}b_1b_2(b_1 + b_2), \\ [\gamma; \beta] &= c_{66}[c_{12}^2 - c_{22}(c_{11} - X)]b_1b_2 + X(c_{11} - X), X = \rho c^2 \end{aligned} \quad (29)$$

3.3. Kết luận chương

Những kết quả chính trong chương này:

+ Đối với môi trường đàn hồi trục hướng được phủ bởi một lớp đàn hồi trục hướng luận án đã đưa ra các công thức chính xác dạng tường minh cho tỷ số H/V cho các trường hợp: nén được-nén được, không nén được/nén được, nén được/không nén được, không nén được/không nén được.

+ Đối với môi trường đàn hồi- đàn diện tìm được phương trình tán sắc xấp xỉ bậc 3 cho các trường hợp: nén được- nén được, không nén được-không nén được, không nén được-nén được.

Chương 4. Sóng Lamb trong môi trường đàn hồi không nén được

4.1 Sóng Lamb trong tấm sandwich đàn hồi trục hướng

Luận án đi nghiên cứu sự truyền của sóng Lamb trong một tấm sandwich trục hướng. Các lớp bề mặt và lớp lõi có thể là nén được và không nén được. Mục đích chính của chương này là tìm ra được phương trình tán sắc dạng hiện của sóng. Đầu tiên, các phương trình tán sắc nén được được tìm ra bằng cách sử dụng phương pháp điều kiện biên hiệu dụng cùng với ma trận chuyển cho lớp trục hướng. Sau đó, với trường hợp không nén được được tìm ra bằng cách sử dụng phương pháp giới hạn đối xứng nén được. Nó chứng minh được rằng các mode đối xứng và phản đối xứng của sóng Lamb là riêng biệt. Các phương trình tán sắc thu được dẫn về được phương trình cho trường hợp tấm sandwich đẳng hướng nén được. Khi không còn lớp bề mặt, các phương trình thu được cho trường hợp nén được trùng với phương trình của sóng Lamb truyền trong các tấm trục hướng nén được. Một số ví dụ số được thực hiện để kiểm tra ảnh hưởng của sự dị hướng và sự không nén được đối với sự lan truyền sóng Lamb. Nó chỉ ra rằng, vận tốc sóng Lamb phụ thuộc mạnh mẽ vào tính dị hướng và tính không nén được của vật liệu.

4.1.1 Ma trận chuyển cho một lớp đàn hồi trục hướng nén được

Xét một lớp đàn hồi trục hướng nén được với độ dày h chiếm miền $a \leq x_2 \leq b$, $b - a = h$. Các trục vật liệu của lớp trùng với các trục $0x_1$, $0x_2$ và $0x_3$. Xét biến dạng phẳng:

$$u_i = u_i(x_1, x_2, t), \quad i = 1, 2, \quad u_3 \equiv 0, \quad (30)$$

ở đây u_i là các thành phần chuyển dịch của lớp, t là thời gian. Trong trường hợp không có lực khối phương trình chuyển động có dạng:

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = \rho \ddot{u}_1, \quad \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} = \rho \ddot{u}_2, \quad (31)$$

ở đây ρ và σ_{ij} ($i, j = 1, 2$) là mật độ khối lượng và các thành phần ứng suất của lớp, dấu phẩy chỉ đạo hàm theo các biến x_k ($k = 1, 2$), dấu chấm chỉ đạo hàm theo biến t . Đối với vật liệu trục hướng, mối liên hệ giữa ứng suất-chuyển dịch có dạng:

$$\sigma_{11} = c_{11}u_{1,1} + c_{12}u_{2,2}, \quad \sigma_{22} = c_{12}u_{1,1} + c_{22}u_{2,2}, \quad \sigma_{12} = c_{66}(u_{1,2} + u_{2,1}), \quad (32)$$

ở đây c_{ij} ($i, j = 1, 2$) là các hằng số vật liệu của lớp, các hằng số phải thỏa mãn điều kiện:

$$c_{ii} > 0 \quad (i = 1, 2, 6), \quad c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0 \quad (33)$$

đó là điều kiện cần và đủ để năng lượng biến dạng dương. Thay thế (32) vào (31) và kết hợp với (30), ta được:

$$\begin{aligned} c_{11}u_{1,11} + c_{66}u_{1,22} + (c_{12} + c_{66})u_{2,12} &= \rho \ddot{u}_1, \\ (c_{12} + c_{66})u_{1,12} + c_{66}u_{2,11} + c_{22}u_{2,22} &= \rho \ddot{u}_2. \end{aligned} \quad (34)$$

Bây giờ ta xét sự lan truyền của sóng theo hướng x_1 với vận tốc c (> 0) và số sóng k (> 0). Khi đó, các thành phần chuyển dịch u_1 và u_2 của sóng thỏa mãn phương trình (34) được tìm dưới dạng:

$$u_1 = U_1(x_2)e^{ik(x_1-ct)}, \quad u_2 = U_2(x_2)e^{ik(x_1-ct)}, \quad (35)$$

$\mathbf{U}(x_2) = [U_1(x_2) \ U_2(x_2)]^T$ là biên độ chuyển dịch. Từ (32) và (35) ta có:

$$\sigma_{12} = k\Sigma_1(x_2)e^{ik(x_1-ct)}, \quad \sigma_{22} = k\Sigma_2(x_2)e^{ik(x_1-ct)}, \quad (36)$$

$\Sigma(x_2) = [\Sigma_1(x_2) \ \Sigma_2(x_2)]^T$ là biên độ ứng suất. Định nghĩa $\xi(x_2) = [\mathbf{U}(x_2) \ \Sigma(x_2)]^T$. Theo thầy Vinh và cộng sự, ta có:

$$\xi(a) = \mathbf{T}\xi(b), \quad (37)$$

ở đây:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{T}_3 & \mathbf{T}_4 \end{bmatrix} \quad (38)$$

với \mathbf{T}_n ($n = \overline{1,4}$) là ma trận cấp 2 được xác định bởi:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \frac{[\gamma; \text{ch}\varepsilon]}{[\gamma]} & \frac{-i[\beta; \text{sh}\varepsilon]}{[\alpha; \beta]} \\ -i[\gamma; \alpha \text{sh}\varepsilon] & \frac{[\alpha \text{ch}\varepsilon; \beta]}{[\alpha; \beta]} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} \frac{-[\alpha; \text{sh}\varepsilon]}{[\alpha; \beta]} & \frac{-i[\text{ch}\varepsilon]}{[\gamma]} \\ \frac{[\alpha; \beta]}{-i[\text{ch}\varepsilon]} & \frac{-[\alpha \text{sh}\varepsilon]}{[\gamma]} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} \frac{-[\gamma; \beta \text{sh}\varepsilon]}{[\gamma]} & \frac{-i\beta_1\beta_2[\text{ch}\varepsilon]}{[\alpha; \beta]} \\ -i\beta_1\beta_2[\text{ch}\varepsilon] & \frac{[\beta; \gamma \text{sh}\varepsilon]}{[\alpha; \beta]} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_4 = \mathbf{T}_1^T. \quad (39)$$

Ở đây, để đơn giản, chúng ta sử dụng các ký hiệu $\text{ch}(\cdot) := \cosh(\cdot)$, $\text{sh}(\cdot) := \sinh(\cdot)$ và:

$$[f; g] := f_2g_1 - f_1g_2, \quad [f] := f_2 - f_1 \quad (40)$$

với α_k, β_k và γ_k ($k = 1, 2$) trong (39) được xác định bởi:

$$\alpha_k = -\frac{(c_{12} + c_{66})b_k}{c_{22}b_k^2 - c_{66} + X}, \quad X = \rho c^2,$$

$$b_1 = \sqrt{\frac{S + \sqrt{S^2 - 4P}}{2}}, \quad b_2 = \sqrt{\frac{S - \sqrt{S^2 - 4P}}{2}},$$

$$S = \frac{c_{22}(c_{11} - X) + c_{66}(c_{66} - X) - (c_{12} + c_{66})^2}{c_{22}c_{66}}, \quad (41)$$

$$P = \frac{(c_{11} - X)(c_{66} - X)}{c_{22}c_{66}},$$

$$\beta_k = c_{66}(b_k - \alpha_k), \quad \gamma_k = c_{12} + c_{22}b_k\alpha_k.$$

Ở đây $\varepsilon_1 = \varepsilon b_1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon b_2$, $\varepsilon = kh$. Một số ví dụ về (40) là $[\text{ch}\varepsilon] = \text{ch}\varepsilon_2 - \text{ch}\varepsilon_1$, $[\alpha \text{ch}\varepsilon] = \alpha_2 \text{ch}\varepsilon_2 - \alpha_1 \text{ch}\varepsilon_1$, $[\alpha; \beta \text{sh}\varepsilon] = \alpha_2 \beta_1 \text{sh}\varepsilon_1 - \alpha_1 \beta_2 \text{sh}\varepsilon_2$, Chú ý rằng mối quan hệ:

$$[f; g][h] - [f; h][g] = [f][h; g], \quad (42)$$

Phương trình (42) được suy ra trực tiếp từ (40) là một đẳng thức hữu ích cho các tính toán. Ma trận \mathbf{T} được gọi là ma trận chuyển cho một lớp đàn hồi trục hướng nén được. Các ma trận \mathbf{T}_n ($n = \overline{1,4}$) thỏa mãn các tính chất sau:

$$\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_2^T, \quad \mathbf{T}_3 = \mathbf{T}_3^T, \quad \mathbf{T}_4 = \mathbf{T}_1^T. \quad (43)$$

Từ (37) ta có:

$$\xi(b) = \hat{\mathbf{T}}\xi(a), \quad \hat{\mathbf{T}} = \mathbf{T}^{-1} \quad (44)$$

Bằng cách thay đổi hướng của $0x_2$ ta có thể thấy rằng ma trận $\hat{\mathbf{T}}$ được xác định bởi các công thức (38), (39) và (41) trong đó ε được thay thế bằng $-\varepsilon$. Cụ thể, ma trận $\hat{\mathbf{T}}$ được định nghĩa là:

$$\hat{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{T}}_1 & \hat{\mathbf{T}}_2 \\ \hat{\mathbf{T}}_3 & \hat{\mathbf{T}}_4 \end{bmatrix} \quad (45)$$

ở đây $\hat{\mathbf{T}}_n$ ($n = \overline{1,4}$) được xác định bởi:

$$\hat{\mathbf{T}}_1 = \begin{bmatrix} \frac{[\gamma; \text{ch}\varepsilon]}{[\gamma]} & \frac{i[\beta; \text{sh}\varepsilon]}{[\alpha; \beta]} \\ \frac{i[\gamma; \alpha \text{sh}\varepsilon]}{[\gamma]} & \frac{[\alpha \text{ch}\varepsilon; \beta]}{[\alpha; \beta]} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{T}}_2 = \begin{bmatrix} \frac{[\alpha; \text{sh}\varepsilon]}{[\alpha; \beta]} & \frac{-i[\text{ch}\varepsilon]}{[\gamma]} \\ \frac{-i[\text{ch}\varepsilon]}{[\gamma]} & \frac{[\alpha \text{sh}\varepsilon]}{[\gamma]} \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{T}}_3 = \begin{bmatrix} \frac{[\gamma; \beta \text{sh}\varepsilon]}{[\gamma]} & \frac{-i\beta_1\beta_2[\text{ch}\varepsilon]}{[\alpha; \beta]} \\ \frac{-i\beta_1\beta_2[\text{ch}\varepsilon]}{[\alpha; \beta]} & \frac{-[\beta; \gamma \text{sh}\varepsilon]}{[\alpha; \beta]} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{T}}_4 = \hat{\mathbf{T}}_1^T, \quad (46)$$

trong đó α_k , β_k và γ_k ($k = 1, 2$) được xác định bởi (41). Các ma trận $\hat{\mathbf{T}}_n$ ($n = \overline{1,4}$) cũng thỏa mãn các tính chất (43).

Từ (38), (39), (41), (45) và (46), nhận thấy rằng các ma trận chuyển \mathbf{T} và $\hat{\mathbf{T}}$ là hoàn toàn xác định. Chúng là hàm của các hằng số vật liệu c_{ij} , mật độ khối lượng $\bar{\rho}$, độ dày không thứ nguyên $\varepsilon = kh$ của lớp và vận tốc sóng c .

4.1.2 Sóng Lamb trong tấm sandwich trục hướng nén được

Xét một tấm sandwich có mặt phẳng đối xứng là $0x_1x_2x_3$, như hình 1. Tấm này bao gồm một lớp trục hướng chiếm miền $-H \leq x_2 \leq H$ (được gọi là lớp lõi) với độ dày $2H$ được kẹp giữa hai lớp trục hướng chiếm miền $-(H+h) \leq x_2 \leq -H$ và $H \leq x_2 \leq (H+h)$ (gọi là các lớp bề mặt) với cùng độ dày h , mật độ khối và các hằng số đàn hồi. Các trục vật liệu của các lớp trục hướng được giả định là giống nhau và chúng là các trục $0x_1$, $0x_2$ và $0x_3$. Giả sử, các lớp đàn hồi là đồng nhất, nén được và liên kết là gắn chặt (liên kết hoàn hảo). Trong đó, tất cả các đại lượng có dấu gạch ngang chỉ các biến và tham số của các lớp bề mặt còn không có dấu gạch chỉ các biến và tham số của lớp lõi.

• Điều kiện biên hiệu dụng:

Áp dụng (37) với $a = -(H+h)$ và $b = -H$ và có tính đến điều kiện không có lực kéo dẫn đến:

$$\mathbf{T}_3(\varepsilon)\bar{\mathbf{U}}(-H) + \mathbf{T}_4(\varepsilon)\bar{\mathbf{\Sigma}}(-H) = \mathbf{0} \quad (47)$$

ở đây $\mathbf{T}_3(\varepsilon)$ và $\mathbf{T}_4(\varepsilon)$, tương ứng với lớp bề mặt bên dưới, được tính bằng (39) trong đó tất cả các đại lượng (ngoại trừ c và $\varepsilon = k.h$) đều xác định. Bởi vì:

$$\mathbf{T}_n(\varepsilon) = \hat{\mathbf{T}}_n(-\varepsilon), \quad n = \overline{1,4} \quad (48)$$

Ta có:

$$\hat{\mathbf{T}}_3(-\varepsilon)\bar{\mathbf{U}}(-H) + \hat{\mathbf{T}}_4(-\varepsilon)\bar{\mathbf{\Sigma}}(-H) = \mathbf{0} \quad (49)$$

ở đây $\hat{\mathbf{T}}_3(-\varepsilon)$ và $\hat{\mathbf{T}}_4(-\varepsilon)$ xác định bởi (46). Áp dụng (44) với $b = (H+h)$ và $a = H$ và có tính đến điều kiện không có lực kéo dẫn đến:

$$\hat{\mathbf{T}}_3(\varepsilon)\bar{\mathbf{U}}(H) + \hat{\mathbf{T}}_4(\varepsilon)\bar{\mathbf{\Sigma}}(H) = \mathbf{0} \quad (50)$$

Từ các điều kiện liên tục ta có:

$$\hat{\mathbf{T}}_3(-\varepsilon)\mathbf{U}(-H) + \hat{\mathbf{T}}_4(-\varepsilon)\mathbf{\Sigma}(-H) = \mathbf{0}, \quad (51)$$

$$\hat{\mathbf{T}}_3(\varepsilon)\mathbf{U}(H) + \hat{\mathbf{T}}_4(\varepsilon)\mathbf{\Sigma}(H) = \mathbf{0} \quad (52)$$

Phương trình (51) và (52) được gọi là điều kiện biên hiệu dụng bởi vì chúng thay thế toàn bộ ảnh hưởng của hai lớp bề mặt lên lớp lõi.

Từ (??), ở dạng thành phần, điều kiện biên hiệu dụng (51) có dạng:

$$-\hat{t}_{11}^{(3)}(\varepsilon)U_1^- + \hat{t}_{12}^{(3)}(\varepsilon)U_2^- + \hat{t}_{11}^{(4)}(\varepsilon)\Sigma_1^- - \hat{t}_{12}^{(4)}(\varepsilon)\Sigma_2^- = 0, \quad (53)$$

$$\hat{t}_{21}^{(3)}(\varepsilon)U_1^- - \hat{t}_{22}^{(3)}(\varepsilon)U_2^- - \hat{t}_{21}^{(4)}(\varepsilon)\Sigma_1^- + \hat{t}_{22}^{(4)}(\varepsilon)\Sigma_2^- = 0 \quad (54)$$

Cộng (??) với (53) và lấy (??) trừ (54) dẫn đến:

$$\hat{t}_{11}^{(3)}(\varepsilon)(U_1^+ - U_1^-) + \hat{t}_{12}^{(3)}(\varepsilon)(U_2^+ + U_2^-) + \hat{t}_{11}^{(4)}(\varepsilon)(\Sigma_1^+ + \Sigma_1^-) + \hat{t}_{12}^{(4)}(\varepsilon)(\Sigma_2^+ - \Sigma_2^-) = 0, \quad (55)$$

Tương tự, lấy (??) trừ (53) và lấy (??) cộng với (54) dẫn đến:

$$\begin{aligned} \hat{t}_{11}^{(3)}(\varepsilon)(U_1^+ + U_1^-) + \hat{t}_{12}^{(3)}(\varepsilon)(U_2^+ - U_2^-) + \hat{t}_{11}^{(4)}(\varepsilon)(\Sigma_1^+ - \Sigma_1^-) + \hat{t}_{12}^{(4)}(\varepsilon)(\Sigma_2^+ + \Sigma_2^-) &= 0, \\ \hat{t}_{21}^{(3)}(\varepsilon)(U_1^+ + U_1^-) + \hat{t}_{22}^{(3)}(\varepsilon)(U_2^+ - U_2^-) + \hat{t}_{21}^{(4)}(\varepsilon)(\Sigma_1^+ - \Sigma_1^-) + \hat{t}_{22}^{(4)}(\varepsilon)(\Sigma_2^+ + \Sigma_2^-) &= 0 \end{aligned} \quad (56)$$

• Phương trình tán sắc:

Bây giờ, sóng Lamb truyền trong tấm sandwich không chịu tác dụng của lực kéo có thể được coi là sóng Lamb truyền trong lớp lõi tuân theo các điều kiện biên hiệu dụng (55) và (56) truyền theo hướng x_1 với vận tốc c và số sóng k . Các thành phần chuyển dịch và ứng suất được biểu

diễn bằng (??) và (??) trong đó $U_n(x_2)$ và $\Sigma_n(x_2)$ ($n = 1, 2$) là các hàm xác định. Theo Vinh và các cộng sự, ta có:

$$\begin{aligned}
U_1(x_2) &= B_1 \text{ch}b_1 y + B_2 \text{sh}b_1 y + B_3 \text{ch}b_2 y + B_4 \text{sh}b_2 y, \\
U_2(x_2) &= i[\alpha_1(B_1 \text{sh}b_1 y + B_2 \text{ch}b_1 y) + \alpha_2(B_3 \text{sh}b_2 y + B_4 \text{ch}b_2 y)], \\
\Sigma_1(x_2) &= \beta_1(B_1 \text{sh}b_1 y + B_2 \text{ch}b_1 y) + \beta_2(B_3 \text{sh}b_2 y + B_4 \text{ch}b_2 y), \\
\Sigma_2(x_2) &= i(\gamma_1(B_1 \text{ch}b_1 y + B_2 \text{sh}b_1 y) + \gamma_2(B_3 \text{ch}b_2 y + B_4 \text{sh}b_2 y)),
\end{aligned} \tag{57}$$

ở đây $y = kx_2$ ($-H \leq x_2 \leq H$), B_1, B_2, B_3, B_4 là các hằng số cần xác định, các đại lượng b_k, α_k, β_k và γ_k được xác định từ (41).

Xét (57) tại $x_2 = \pm H$ ta có:

$$\begin{aligned}
U_1^+ + U_1^- &= 2(B_1 \text{ch}\epsilon_1 + B_3 \text{ch}\epsilon_2), \\
U_1^+ - U_1^- &= 2(B_2 \text{sh}\epsilon_1 + B_4 \text{sh}\epsilon_2), \\
U_2^+ + U_2^- &= 2i(\alpha_1 B_2 \text{ch}\epsilon_1 + \alpha_2 B_4 \text{ch}\epsilon_2), \\
U_2^+ - U_2^- &= 2i(\alpha_1 B_1 \text{sh}\epsilon_1 + \alpha_2 B_3 \text{sh}\epsilon_2), \\
\Sigma_1^+ + \Sigma_1^- &= 2(\beta_1 B_2 \text{ch}\epsilon_1 + \beta_2 B_4 \text{ch}\epsilon_2), \\
\Sigma_2^+ - \Sigma_2^- &= 2(\beta_1 B_1 \text{sh}\epsilon_1 + \beta_2 B_3 \text{sh}\epsilon_2), \\
\Sigma_2^+ + \Sigma_2^- &= 2i(\gamma_1 B_1 \text{ch}\epsilon_1 + \gamma_2 B_3 \text{ch}\epsilon_2), \\
\Sigma_2^+ - \Sigma_2^- &= 2i(\gamma_1 B_2 \text{sh}\epsilon_1 + \gamma_2 B_4 \text{sh}\epsilon_2),
\end{aligned} \tag{58}$$

ở đây $\epsilon_1 = eb_1, \epsilon_2 = eb_2, \epsilon = kH$. Thay (58) vào (55) và (56) dẫn đến:

$$\begin{cases} a_{11}B_2 + a_{12}B_4 = 0 \\ a_{21}B_2 + a_{22}B_4 = 0 \end{cases} \tag{59}$$

$$\begin{cases} b_{11}B_1 + b_{12}B_3 = 0 \\ b_{21}B_1 + b_{22}B_3 = 0 \end{cases} \tag{60}$$

ở đây:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= (\hat{t}_{11}^{(3)} + i\gamma_1 \hat{t}_{12}^{(4)})\text{sh}\epsilon_1 + (i\alpha_1 \hat{t}_{12}^{(3)} + \beta_1 \hat{t}_{11}^{(4)})\text{ch}\epsilon_1, \\
a_{12} &= (\hat{t}_{11}^{(3)} + i\gamma_2 \hat{t}_{12}^{(4)})\text{sh}\epsilon_2 + (i\alpha_2 \hat{t}_{12}^{(3)} + \beta_2 \hat{t}_{11}^{(4)})\text{ch}\epsilon_2, \\
a_{21} &= (\hat{t}_{21}^{(3)} + i\gamma_1 \hat{t}_{22}^{(4)})\text{sh}\epsilon_1 + (i\alpha_1 \hat{t}_{22}^{(3)} + \beta_1 \hat{t}_{21}^{(4)})\text{ch}\epsilon_1, \\
a_{22} &= (\hat{t}_{21}^{(3)} + i\gamma_2 \hat{t}_{22}^{(4)})\text{sh}\epsilon_2 + (i\alpha_2 \hat{t}_{22}^{(3)} + \beta_2 \hat{t}_{21}^{(4)})\text{ch}\epsilon_2,
\end{aligned} \tag{61}$$

và:

$$\begin{aligned}
b_{11} &= (\hat{t}_{11}^{(3)} + i\gamma_1 \hat{t}_{12}^{(4)})\text{ch}\epsilon_1 + (i\alpha_1 \hat{t}_{12}^{(3)} + \beta_1 \hat{t}_{11}^{(4)})\text{sh}\epsilon_1, \\
b_{12} &= (\hat{t}_{11}^{(3)} + i\gamma_2 \hat{t}_{12}^{(4)})\text{ch}\epsilon_2 + (i\alpha_2 \hat{t}_{12}^{(3)} + \beta_2 \hat{t}_{11}^{(4)})\text{sh}\epsilon_2, \\
b_{21} &= (\hat{t}_{21}^{(3)} + i\gamma_1 \hat{t}_{22}^{(4)})\text{ch}\epsilon_1 + (i\alpha_1 \hat{t}_{22}^{(3)} + \beta_1 \hat{t}_{21}^{(4)})\text{sh}\epsilon_1, \\
b_{22} &= (\hat{t}_{21}^{(3)} + i\gamma_2 \hat{t}_{22}^{(4)})\text{ch}\epsilon_2 + (i\alpha_2 \hat{t}_{22}^{(3)} + \beta_2 \hat{t}_{21}^{(4)})\text{sh}\epsilon_2
\end{aligned} \tag{62}$$

Do $|B_2|^2 + |B_4|^2 \neq 0$ và $|B_1|^2 + |B_3|^2 \neq 0$, các định thức của hệ số của hệ thuần nhất (59) và (60) phải bằng không:

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0, \tag{63}$$

$$b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12} = 0 \tag{64}$$

Thay (61) vào (63) và (62) vào (64) và sau một số biến đổi ta nhận được:

$$A_1\text{sh}\epsilon_1\text{sh}\epsilon_2 + A_2\text{ch}\epsilon_1\text{ch}\epsilon_2 + A_3\text{sh}\epsilon_1\text{ch}\epsilon_2 + A_4\text{sh}\epsilon_2\text{ch}\epsilon_1 = 0, \tag{65}$$

$$A_2\text{sh}\epsilon_1\text{sh}\epsilon_2 + A_1\text{ch}\epsilon_1\text{ch}\epsilon_2 + A_4\text{sh}\epsilon_1\text{ch}\epsilon_2 + A_3\text{sh}\epsilon_2\text{ch}\epsilon_1 = 0, \tag{66}$$

ở đây A_k được xác định bởi:

$$\begin{aligned}
A_1 &= [\gamma][\bar{\alpha}; \bar{\beta}][\bar{\gamma}\text{ch}\epsilon; \bar{\beta}\text{sh}\epsilon], \quad A_2 = [\alpha; \beta][\bar{\gamma}][\bar{\gamma}\text{sh}\epsilon; \bar{\beta}\text{ch}\epsilon], \\
A_3 &= \beta_2 G_1 + \alpha_2 \gamma_1 G_2 + \alpha_2 G_3 + \beta_2 \gamma_1 G_4, \\
A_4 &= -\beta_1 G_1 - \alpha_1 \gamma_2 G_2 - \alpha_1 G_3 - \beta_1 \gamma_2 G_4,
\end{aligned} \tag{67}$$

trong đó:

$$\begin{aligned}
G_1 &= \bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2 \langle \bar{\alpha}; \bar{\beta} \rangle (\text{ch}\epsilon_1 \text{ch}\epsilon_2 - 1) - \langle \bar{\gamma}^2; \bar{\alpha} \bar{\beta} \rangle \text{sh}\epsilon_1 \text{sh}\epsilon_2, \\
G_2 &= \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 \langle \bar{\gamma} \rangle (\text{ch}\epsilon_1 \text{ch}\epsilon_2 - 1) - \langle \bar{\beta}^2; \bar{\gamma} \rangle \text{sh}\epsilon_1 \text{sh}\epsilon_2, \\
G_3 &= 2\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 \bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2 (1 - \text{ch}\epsilon_1 \text{ch}\epsilon_2) + \langle \bar{\beta}^2; \bar{\gamma}^2 \rangle \text{sh}\epsilon_1 \text{sh}\epsilon_2, \\
G_4 &= \langle \bar{\alpha}; \bar{\beta} \bar{\gamma} \rangle - \langle \bar{\alpha} \bar{\gamma}; \bar{\beta} \rangle \text{ch}\epsilon_1 \text{ch}\epsilon_2 + \langle \bar{\alpha} \bar{\beta}; \bar{\gamma} \rangle \text{sh}\epsilon_1 \text{sh}\epsilon_2
\end{aligned} \tag{68}$$

Để đơn giản, ta sử dụng các ký hiệu:

$$\langle f; g \rangle = f_2 g_1 + f_1 g_2, \quad \langle f \rangle = f_1 + f_2 \tag{69}$$

• *Phương trình tán sắc cho các mode không đối xứng:*

Khi (65) đúng, nghĩa là phương trình (63) thỏa mãn thì $b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12} \neq 0$. Từ sự khẳng định này và kết hợp (60) ta có $B_1 = B_3 = 0$. Từ (57) và $B_1 = B_3 = 0$, rõ ràng là:

$$\begin{aligned}
U_1(-x_2) &= -U_1(x_2), \quad U_2(-x_2) = U_2(x_2), \\
\Sigma_1(-x_2) &= \Sigma_1(x_2), \quad \Sigma_2(-x_2) = -\Sigma_2(x_2)
\end{aligned} \tag{70}$$

với $0 \leq |x_2| \leq H$. Mặt khác, ta có $0 \leq x_2 \leq h$:

$$\begin{aligned} & U_1[-(H + x_2)] \\ &= T_{11}^{(1)}(y)U_1(-H) + T_{12}^{(1)}(y)U_2(-H) + T_{11}^{(2)}(y)\Sigma_1(-H) + T_{12}^{(2)}(y)\Sigma_2(-H) \end{aligned} \quad (71)$$

Sử dụng (37) với $a = -(H + x_2)$ và $b = -H$, trong đó $y = kx_2$ và $t_{ij}^{(n)}$ là các thành phần của ma trận \mathbf{T}_n . Từ (39) và (46) dẫn đến:

$$T_{11}^{(1)}(y) = \hat{T}_{11}^{(1)}(y), \quad T_{12}^{(1)}(y) = -\hat{T}_{12}^{(1)}(y), \quad T_{11}^{(2)}(y) = -\hat{T}_{11}^{(2)}(y), \quad T_{12}^{(2)}(y) = \hat{T}_{12}^{(2)}(y) \quad (72)$$

Sử dụng (70) với $x_2 = H$ và (72) vào (71) dẫn đến:

$$U_1[-(H+x_2)] = -\left[\hat{T}_{11}^{(1)}(y)U_1(H) + \hat{T}_{12}^{(1)}(y)U_2(H) + \hat{T}_{11}^{(2)}(y)\Sigma_1(H) + \hat{T}_{12}^{(2)}(y)\Sigma_2(H)\right] \quad (73)$$

Từ phương trình (44) với $b = H + x_2$ và $a = H$, vế phải của (73) là $-U_1(H + x_2)$, do đó $U_1[-(H + x_2)] = -U_1(H + x_2)$. Bằng cách làm tương tự, ta có thể chứng minh rằng $U_2[-(H + x_2)] = U_2(H + x_2)$ khi $0 \leq x_2 \leq h$. Vì vậy, ta có:

$$U_1(-x_2) = -U_1(x_2), \quad U_2(-x_2) = U_2(x_2) \quad \forall x_2 : 0 \leq |x_2| \leq H + h \quad (74)$$

Phương trình (65) chính là phương trình tán sắc của các mode không đối xứng.

- *Phương trình tán sắc cho các mode đối xứng*

Tương tự, ta có thể thấy rằng phương trình (66) là phương trình tán sắc cho các mode đối xứng. Cần lưu ý rằng phương trình tán sắc của các mode đối xứng (không đối xứng) thu được từ phương trình tán sắc của các mode không đối xứng (đối xứng) bằng cách thay thế $\sinh \epsilon_k$ ($k = 1, 2$) bằng $\cosh \epsilon_k$.

- **Trường hợp đẳng hướng:**

Khi lớp mặt và lớp lõi đều là đẳng hướng ta có:

$$c_{11} = c_{22} = \lambda + 2\mu, \quad c_{12} = \lambda, \quad c_{66} = \mu, \quad \bar{c}_{11} = \bar{c}_{22} = \bar{\lambda} + 2\bar{\mu}, \quad \bar{c}_{12} = \bar{\lambda}, \quad \bar{c}_{66} = \bar{\mu} \quad (75)$$

Thay (75) vào (41), ta có được có được các biểu thức, các biểu thức này đã được trình bày trong [?]:

$$\begin{aligned} & b_1 = \sqrt{1 - \gamma x}, \quad b_2 = \sqrt{1 - x}, \quad \alpha_1 = b_1, \quad \alpha_2 = 1/b_2 \\ & \bar{b}_1 = \sqrt{1 - \bar{\gamma} \bar{x}}, \quad \bar{b}_2 = \sqrt{1 - \bar{x}}, \quad \bar{\alpha}_1 = -\bar{b}_1, \quad \bar{\alpha}_2 = -1/\bar{b}_2 \\ & \beta_1 = -2\mu b_1, \quad \beta_2 = -\mu(2 - x)/b_2, \quad \gamma_1 = -\mu(2 - x), \quad \gamma_2 = -2\mu \\ & \bar{\beta}_1 = 2\bar{\mu} \bar{b}_1, \quad \bar{\beta}_2 = \bar{\mu}(2 - \bar{x})/\bar{b}_2, \quad \bar{\gamma}_1 = -\bar{\mu}(2 - \bar{x}), \quad \bar{\gamma}_2 = -2\bar{\mu} \end{aligned} \quad (76)$$

trong đó:

$$\gamma = \frac{\mu}{(\lambda + 2\mu)}, \quad \bar{\gamma} = \frac{\bar{\mu}}{(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})}, \quad x = \frac{X}{\mu}, \quad \bar{x} = \frac{\bar{X}}{\bar{\mu}} \quad (77)$$

$\lambda, \mu, \bar{\lambda}, \bar{\mu}$ là các hằng số Lamé. Thay (76) vào (67), (68) ta thu được phương trình tán sắc của sóng Lamb truyền trong tấm sandwich đẳng hướng. Đó là, (65) cho các mode không đối xứng và (66) cho các mode đối xứng trong đó A_k xác định bởi:

$$\begin{aligned} A_1 &= -\mu\bar{\mu}x\bar{x}b_2 \left[4\bar{b}_1^2\bar{b}_2 \text{sh}\varepsilon_1 \text{ch}\varepsilon_2 - \bar{b}_1(2 - \bar{x})^2 \text{sh}\varepsilon_2 \text{ch}\varepsilon_1 \right], \\ A_2 &= \mu\bar{\mu}x\bar{x}b_1\bar{b}_2 \left[(2 - \bar{x})^2 \text{sh}\varepsilon_1 \text{ch}\varepsilon_2 - 4\bar{b}_1\bar{b}_2 \text{ch}\varepsilon_2 \text{sh}\varepsilon_1 \right], \\ A_3 &= 4\bar{b}_1\bar{b}_2(2 - \bar{x}) \left[\mu\bar{\mu}(2 - x)(4 - \bar{x}) - 2\bar{\mu}^2(2 - \bar{x}) - \mu^2(2 - x)^2 \right] \\ &\quad - \bar{b}_1\bar{b}_2 \left\{ 4\mu\bar{\mu}(2 - x)(2 - \bar{x})(4 - \bar{x}) - 8\bar{\mu}^2(2 - \bar{x})^2 \right. \\ &\quad \left. - \mu^2(2 - x)^2 [4 + (2 - \bar{x})^2] \right\} \text{ch}\varepsilon_1 \text{ch}\varepsilon_2 + \left\{ 2\mu\bar{\mu}(2 - x) [8\bar{b}_1^2\bar{b}_2^2 + (2 - \bar{x})^3] \right. \\ &\quad \left. - \bar{\mu}^2 [16\bar{b}_1^2\bar{b}_2^2 + (2 - \bar{x})^4] - \mu^2(2 - x)^2 [4\bar{b}_1^2\bar{b}_2^2 + (2 - \bar{x})^2] \right\} \text{sh}\varepsilon_1 \text{sh}\varepsilon_2, \\ A_4 &= -8b_1b_2\bar{b}_1\bar{b}_2(2 - \bar{x}) \left[\mu\bar{\mu}(4 - \bar{x}) - \bar{\mu}^2(2 - \bar{x}) - 2\mu^2 \right] + \\ &\quad + 4b_1b_2\bar{b}_1\bar{b}_2 \left\{ 2\mu\bar{\mu}(2 - \bar{x})(4 - \bar{x}) - 2\bar{\mu}^2(2 - \bar{x})^2 - \mu^2 [4 + (2 - \bar{x})^2] \right\} \text{ch}\varepsilon_1 \text{ch}\varepsilon_2 + \\ &\quad - b_1b_2 \left\{ 4\mu\bar{\mu} [8\bar{b}_1^2\bar{b}_2^2 + (2 - \bar{x})^3] - \bar{\mu}^2 [16\bar{b}_1^2\bar{b}_2^2 + (2 - \bar{x})^4] \right. \\ &\quad \left. - 4\mu^2 [4\bar{b}_1^2\bar{b}_2^2 + (2 - \bar{x})^2] \right\} \text{sh}\varepsilon_1 \text{sh}\varepsilon_2 \end{aligned} \quad (78)$$

Sau khi nhân 2 vế của phương trình (65) với $-(kh)^7(kH)^3b_2\bar{b}_2^2/\bar{X}^4$, thấy rằng phương trình (65) với A_1, A_2, A_3, A_4 từ (78) hoàn toàn trùng với phương trình (17) trong [?].

• Sóng Lamb trong tấm trục hướng:

Khi không có các lớp bề mặt, tức là $h = 0$ ($\Rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$), dẫn đến (67) và (68): $0 = A_1 = A_2$ ($= G_1 = G_2 = G_3$), $A_3 = \beta_2\gamma_1G_4$ và $A_4 = -\beta_1\gamma_2G_4$. Thay thế các kết quả này vào phương trình (65) và (66) ta thu được phương trình tán sắc của sóng Lamb truyền trong một tấm trục hướng với độ dày H , cụ thể là:

$$\frac{\text{th}(\epsilon b_2)}{\text{th}(\epsilon b_1)} = \frac{\beta_1\gamma_2}{\beta_2\gamma_1} \quad (79)$$

cho các mode đối xứng và:

$$\frac{\text{th}(\epsilon b_2)}{\text{th}(\epsilon b_1)} = \frac{\beta_2 \gamma_1}{\beta_1 \gamma_2} \quad (80)$$

cho các mode không đối xứng, trong đó $\text{th}(\cdot) := \tanh(\cdot)$, $\epsilon = kH$ và b_k , β_k , γ_k được tính bởi (41). Thay các biểu thức của β_k và γ_k vào (79) và (80) ta có:

$$\frac{\text{th}(\epsilon b_2)}{\text{th}(\epsilon b_1)} = \frac{b_2(c_{12}b_1^2 + c_{11} - X)[c_{12}(c_{12} + c_{66}) - c_{22}(c_{11} - X - c_{66}b_2^2)]}{b_1(c_{12}b_2^2 + c_{11} - X)[c_{12}(c_{12} + c_{66}) - c_{22}(c_{11} - X - c_{66}b_1^2)]} \quad (81)$$

cho các mode đối xứng và:

$$\frac{\text{th}(\epsilon b_2)}{\text{th}(\epsilon b_1)} = \frac{b_1(c_{12}b_2^2 + c_{11} - X)[c_{12}(c_{12} + c_{66}) - c_{22}(c_{11} - X - c_{66}b_1^2)]}{b_2(c_{12}b_1^2 + c_{11} - X)[c_{12}(c_{12} + c_{66}) - c_{22}(c_{11} - X - c_{66}b_2^2)]} \quad (82)$$

cho các mode không đối xứng. Các phương trình (81) và (82) trùng với phương trình (7) và (8) trong [?] được coi là kết quả mới của luận án Tiến sĩ của Biad [?] được hoàn thành vào năm 2012.

Đối với tấm đẳng hướng, từ (41) và (75) ta có:

$$\frac{\gamma_2}{\beta_2} = \frac{2b_2}{(2-x)}, \quad \frac{\gamma_1}{\beta_1} = \frac{2-x}{2b_1} \quad (83)$$

Thay vào (79), (80) nhận được phương trình tán sắc của sóng Lamb trong tấm đẳng hướng [?]:

$$\frac{\text{th}(\epsilon \sqrt{1-x})}{\text{th}(\epsilon \sqrt{1-\gamma x})} = \frac{4\sqrt{1-x}\sqrt{1-\gamma x}}{(2-x)^2} \quad (84)$$

cho các mode đối xứng và:

$$\frac{\text{th}(\epsilon \sqrt{1-x})}{\text{th}(\epsilon \sqrt{1-\gamma x})} = \frac{(2-x)^2}{4\sqrt{1-x}\sqrt{1-\gamma x}} \quad (85)$$

cho các mode không đối xứng.

KẾT LUẬN

Vật liệu dị hướng không nén được đang được sử dụng rộng rãi trong công nghệ hiện đại. Do vậy, việc đánh giá các tính chất cơ học của các cấu trúc dị hướng không nén được trước và trong quá trình sử dụng là hết sức cần thiết và có ý nghĩa. Phương trình tán sắc và tỷ số H/V là các công cụ tiện lợi để thực hiện nhiệm vụ này. Sử dụng các phương pháp: điều kiện biên hiệu dụng, ma trận chuyển, giới hạn không nén được và phương pháp tích phân đều, vectơ phân cực luận án đã tìm ra các phương trình tán sắc dạng hiện (chính xác, xấp xỉ), công thức tỷ số H/V của sóng Rayleigh, sóng Stoneley, sóng Scholte và sóng Lamb cho một số môi trường đàn hồi dị hướng không nén được. Các kết quả thu được của luận án có ý nghĩa cả về mặt lý thuyết và ứng dụng thực tế trong lĩnh vực truyền sóng trong môi trường đàn hồi.

CÁC VẤN ĐỀ TIẾP TỤC PHÁT TRIỂN SAU LUẬN ÁN

- Sóng Rayleigh trong môi trường đàn hồi monoclinic $x_1, x_2 = 0$ không nén được
- Sóng Stoneley trong môi trường đàn hồi monoclinic $x_1, x_2 = 0$ không nén được
- Sóng Lamb trong bản đàn hồi micropholar, monoclinic $x_3 = 0$ không nén được
- Phát triển phương pháp giới hạn không nén được cho các vật liệu monoclinic $x_1, x_2, x_3 = 0$

DANH MỤC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC ĐÃ CÔNG BỐ

1. N.T.K. Linh, P. C. Vinh, T. T. Tuan & L. T. Thang (2020), "The H/V ratio of Rayleigh waves in layered incompressible orthotropic half-spaces and the incompressible limit method", *Waves in Random and Complex Media*, Volume 32, - Issue 1, pp. 1-17. (ISI uy tín)
2. N.T.K. Linh, P.C. Vinh, L.T. Thang & P.T.H. Giang (2021), "Lamb waves in sandwich orthotropic elastic plates", *Waves in Random and Complex Media*, <https://doi.org/10.1080/17455030.2021.1940352>. (ISI uy tín)
3. V. T. N. Anh, L. T. Thang, P. C. Vinh and T. T. Tuan (2020), "Stoneley waves with spring contact and evaluation of the quality of imperfect bonds", *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, Volume 71, Issue 1, article ID.36. (ISI uy tín)
4. V.T.N. Anh, P.C. Vinh, N.T.K. Linh and L.T. Thang (2021), "Explicit transfer matrix for an incompressible orthotropic elastic layer and applications", *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* 72: 145, . (ISI uy tín)
5. Phạm Chí Vinh và Lương Thế Thắng (2018), "Sóng Stoneley trong môi trường trục hướng không nén được", Hội nghị Khoa học toàn quốc Cơ học Vật rắn lần thứ XIV, TP. Hồ Chí Minh, ngày 19-20 tháng 7 năm 2018, trang: 862-8676.
6. Phạm Chí Vinh, Nguyễn Thị Khánh Linh, Lương Thế Thắng và Bùi Thanh Tú (2018), "Phương trình tán sắc của sóng mặt Rayleigh truyền trong bán không gian đàn điện không nén được", Hội nghị Khoa học toàn quốc Cơ học Vật rắn lần thứ XIV TP. Hồ Chí Minh, ngày 19-20 tháng 7 năm 2018, trang: 855-861.