ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

Nguyễn Thị Lan Hương

MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA MIỀN TRONG $\mathbb{C}^n$ VỚI NHÓM TỰ ĐẲNG CẤU KHÔNG COMPACT

Chuyên ngành: Toán Giải tích
Mã số: 62 46 01 02

DỰ THẢO TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ

Hà Nội - 5/2023

Công trình được hoàn thành tại: ....

....

Người hướng dẫn khoa học: ....

....

Phản biện: ....

....

Phản biện: ....

....

Phản biện: ....

....

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng cấp Đại học Quốc gia chấm luận án tiến sĩ họp tại ....

....

vào hồi .... giờ .... ngày .... tháng .... năm 20 ....

Có thể tìm hiểu luận án tại:

- Thư viện Quốc gia Việt Nam;
- Trung tâm Thông tin - Thư viện, Đại học Quốc gia Hà Nội.

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Cho Ω là một miền trong $\mathbb{C}^n$. Tập tất cả các tự đẳng cấu (song chỉnh hình từ Ω vào Ω) của Ω, kí hiệu bởi $\mathrm{Aut}(\Omega)$ lập thành một nhóm với phép toán hợp thành. Hơn nữa, $\mathrm{Aut}(\Omega)$ cũng là một nhóm tôpô với tôpô hội tụ đều trên các tập con compact (tức là tôpô compact-mở).

Các nghiên cứu trong mấy thập kỉ qua chỉ rằng, hình học của miền được xác định bởi cấu trúc của nhóm tự đẳng cấu, tức là biết được nhóm $\mathrm{Aut}(\Omega)$ ta có thể suy ra được một số tính chất hình học của miền Ω. Vì vậy, việc tính hoặc mô tả nhóm tự đẳng cấu là cần thiết. Tuy nhiên, với hầu hết các miền, việc tính các nhóm tự đẳng cấu không đơn giản và mới chỉ thực hiện được trong một số trường hợp cụ thể. Cụ thể, trong mặt phẳng phức, nhóm tự đẳng cấu của đĩa đơn vị được tính toán dễ dàng. Đối với các miền trong không gian phức với chiều ≥ 2, đa đĩa Δ^n và hình cầu đơn vị $\mathbb{B}^n$ cũng được mô tả chi tiết. Từ việc hai nhóm này không đẳng cấu với nhau (chẳng hạn chiều của hai nhóm tự đẳng cấu khác nhau) ta suy ra ngay Δ^n và $\mathbb{B}^n$ không song chỉnh hình với nhau, mặc dù chúng đồng phôi với nhau (Định lý Poincaré).

Năm 1931, P. Thullen đã mô tả nhóm tự đẳng cấu miền miền ellipsoid (miền Thullen)

$$D = \{(w, z) \in \mathbb{C}^2 \colon |w|^2 + |z|^p < 1\},\ 1 < p \neq 2.$$

Sau đó, các nhà Toán học như H. Cartan, I. Naruki, T. Sunada, R. E. Greene, S. Krantz đã thành công trong việc mô tả nhóm tự đẳng cấu của một số lớp miền Thullen tổng quát trong $\mathbb{C}^n$. Đặc biệt, Ninh Văn Thu and Mai Anh Đức đã tính được nhóm tự đẳng cấu của mô hình thuần nhất trong $\mathbb{C}^2$ sau đây:

$$M_H = \{(w, z) \in \mathbb{C}^2 \colon |w|^2 + H(z) < 1\},$$

trong đó $H(z)$ là đa thức thực thuần nhất theo trọng điều hoà dưới bậc $2m$ ($m \geq 1$) và không chứa hạng tử điều hoà.

Phần đầu của luận án được dành để mô tả nhóm tự đẳng cấu của một số lớp miền tổng quát hơn trong $\mathbb{C}^n$. Cụ thể, luận án sẽ mô tả nhóm tự đẳng cấu của mô hình đa kiểu hữu hạn (theo nghĩa của D. Catlin) trong $\mathbb{C}^n$ sau đây:

$$M_P = \{z = (z', z_n) \in \mathbb{C}^n \colon \mathrm{Re}(z_n) + P(z') < 0\},$$

trong đó $P(z')$ là đa thức giá trị thực, đa điều hoà dưới, thuần nhất theo trọng và không chứa hạng tử đa điều hoà.

Tiếp theo, trong Giải tích phức nhiều biến các nhà Toán học tập trung nghiên cứu các tính chất của miền bất biến qua các tự đẳng cấu. Cụ thể, các metric bất biến như metric Carathéodory, metric Kobayashi, metric Bergman,...và các hàm bất biến như hàm squeezing, hàm Fridman.

Trên tập con compact tuỳ ý của Ω, hàm squeezing bị chặn dưới bởi hằng số dương và vì thế các metric bất biến sẽ tương đương nhau trên tập này. Vì thế, hàm squeezing có ý nghĩa khi điểm p rất gần biên $\partial\Omega$. Trong trường hợp miền Ω có hàm squeezing bị chặn dưới bởi hằng số dương trên Ω (miền squeezing đều), các metric trên Ω tương đương nhau. Tuy nhiên, đối với miền bất kì ước lượng này có thể không xảy ra và hàm squeezing có thể dần đến 0 khi điểm p dần đến biên của miền. Vì vậy, luận án tập trung nghiên cứu dáng điệu biên của hàm squeezing trên các miền giả lồi kiểu hữu hạn.

Như vậy, với các lý do nói trên chúng tôi lựa chọn đề tài luận án "*Một số tính chất của miền trong $\mathbb{C}^n$ với nhóm tự đẳng cấu không compact*" là để tiếp tục giải quyết hai bài toán sau đây:

Bài toán 1. Mô tả nhóm tự đẳng cấu của miền trong $\mathbb{C}^n$.

Bài toán 2. Nghiên cứu dáng điệu biên của hàm squeezing của miền trong $\mathbb{C}^n$.

2. Mục đích nghiên cứu

Mục đích của luận án là mô tả nhóm tự đẳng cấu của một số lớp miền trong $\mathbb{C}^n$ (mô hình đa kiểu hữu hạn) và nghiên cứu dáng điệu biên của hàm squeezing trên miền giả lồi kiểu hữu hạn trong $\mathbb{C}^n$.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Như đã trình bày ở phần lý do chọn đề tài, đối tượng nghiên cứu của luận án là các miền trong $\mathbb{C}^n$. Trong luận án, tư tưởng chính xuyên suốt là khảo sát các tính chất hình học của miền. Cụ thể, luận án khảo sát nhóm tự đẳng cấu của mô hình đa kiểu hữu hạn và khảo sát dáng điệu của hàm squeezing tại các điểm gần biên của miền giả lồi kiểu hữu hạn.

4. Phương pháp nghiên cứu

Để giải quyết những vấn đề đặt ra trong luận án, chúng tôi sử dụng các phương pháp nghiên cứu và kĩ thuật truyền thống của Giải tích phức, Hình học phức. Đặc biệt, chúng tôi áp dụng kĩ thuật scaling của S. Pinchuk linh hoạt cho từng trường hợp cụ thể. Ngoài ra, chúng tôi cũng sáng tạo ra những kĩ thuật mới cũng như đưa ra các ví dụ minh hoạ.

5. Các kết quả đạt được và ý nghĩa của đề tài

Luận án gồm ba chương:

Chương 1: Trình bày về một số kiến thức cốt lõi liên quan đến các vấn đề nghiên cứu. Nội dung của chương bao gồm: các khái niệm về hàm điều hoà dưới, đa điều hoà dưới, miền giả lồi, kiểu theo nghĩa D'Angelo, đa kiểu Catlin, hàm peak đa điều hoà dưới, sự hội tụ của dãy miền.

Chương 2: Trình bày về nhóm tự đẳng cấu của một số miền trong

$\mathbb{C}^n$. Cụ thể chúng tôi sẽ mô tả nhóm tự đẳng cấu của một số lớp miền trong $\mathbb{C}^n$.

Với mỗi điểm $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, ta kí hiệu $z' = (z_1, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$. Cố định các số nguyên dương $m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}$. Khi đó, theo thứ tự ta gán trọng $\dfrac{1}{2m_1}, \ldots, \dfrac{1}{2m_{n-1}}$ cho các các biến $z_1, \ldots, z_{n-1}$. Với đa chỉ số $K = (k_1, \ldots, k_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1}$, ta kí hiệu $wt(K) := \sum\limits_{j=1}^{n-1} \dfrac{k_j}{2m_j}$ là trọng của nó.

Trong chương này, ta xét đa thức P theo biến z' giá trị thực, đa điều hoà dưới, không chứa hạng tử đa điều hoà, cho bởi

$$P\left(z'\right) = \sum_{wt(K)=wt(L)=\frac{1}{2}} a_{KL} {z'}^K \overline{z'}^L, \tag{1}$$

với $a_{KL} \in \mathbb{C}$, $a_{KL} = \bar{a}_{LK}$. Chú ý rằng đa thức P là đa thức thuần nhất theo trọng $\Lambda := \left(\dfrac{1}{m_1}, \ldots, \dfrac{1}{m_{n-1}}\right)$, tức là

$$P(t^{1/2m_1} z_1, \ldots, t^{1/2m_{n-1}} z_{n-1}) = tP(z_1, \ldots, z_{n-1}) \text{ và } t > 0.$$

$$\text{với mọi } z' \in \mathbb{C}^{n-1}$$

Mục đích của chương này là mô tả nhóm tự đẳng cấu của mô hình đa kiểu hữu hạn (theo nghĩa của D. Catlin) trong $\mathbb{C}^n$ sau đây:

$$M_P = \{z \in \mathbb{C}^n \colon \operatorname{Re}(z_n) + P(z') < 0\}.$$

Cần nhấn mạnh rằng các mô hình này xuất hiện trong các công trình về đặc trưng cho miền kiểu hữu hạn Ω trong $\mathbb{C}^n$ với nhóm tự đẳng cấu không compact. Chẳng hạn, Bedford-Pinchuk và H. Gaussier đã chứng minh rằng nếu Ω là miền lồi, kiểu hữu hạn trong một lân cận của điểm tụ quỹ đạo thì Ω song chỉnh hình với mô hình M_P nói trên. Gần đây, đặc trưng của mô hình đa kiểu hữu hạn cũng được thiết lập bởi Rong và Zhang. Trong trường hợp Ω là giả lồi chặt, Wong và Rosay chỉ ra rằng mọi miền giả lồi chặt bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ với nhóm tự đẳng cấu không compact là song chỉnh hình với cầu đơn vị $\mathbb{B}^n$. Thêm nữa, khi $n = 2$, nhóm tự đẳng cấu của mô hình M_P cũng đã được mô tả đầy đủ.

Chúng tôi quan tâm đến hai lớp miền đặc biệt D_P và Q_P trong $\mathbb{C}^n(n \geq 2)$, được xác định lần lượt như sau:

$$D_P := \left\{(z', z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_n|^2 + P(z') < 1\right\};$$
$$Q_P := \{(z', z_n) \in \mathbb{C}^n : \mathrm{Re}(z_n) + P(z') < 0\},$$

Kết quả chính thứ nhất của chương hai là định lý sau đây.

Định lý 2.2.1. *Cho P là đa thức thực đa điều hòa dưới thuần nhất theo trọng trên $\mathbb{C}^{n-1}$ cho bởi (1) với giả thiết thêm rằng $P(z') > 0$ với mọi $z' \in \mathbb{C}^{n-1} \backslash \{0\}$. Khi đó,* $\mathrm{Aut}(D_P)$ *được sinh bởi G_P và* $\{\phi_{a,\theta} \colon a \in \Delta, \theta \in \mathbb{R}\}$.

Tiếp theo, chúng tôi sẽ giới thiệu về kết quả chính thứ hai. Trước hết, chúng ta sẽ nhắc lại định nghĩa về miền WB giới thiệu. Cụ thể, mô hình M_P như trên được gọi là miền WB (weighted-bumped) nếu M_P là giả lồi chặt tại mọi điểm biên bên ngoài tập $\{\partial M_P \cap (\{0'\} \times i\mathbb{R})\}$.

Để giới thiệu kết quả thứ hai, ta kí hiệu $S_\lambda(\lambda > 0)$ (phép co giãn) và $T_s(s \in \mathbb{R})$ (phép tịnh tiến) là các tự đẳng cấu của M_P, lần lượt định nghĩa bởi:

$$S_\lambda(z) = \left(\lambda^{\frac{1}{2m_1}} z_1, \ldots, \lambda^{\frac{1}{2m_{n-1}}} z_{n-1}, \lambda z_n\right); T_s(z) = \left(z', z_n + is\right).$$

Thêm nữa, ta gọi mô hình M_P là "tổng quát" (generic) nếu nó không song chỉnh hình với bất kỳ mô hình tròn xoay hay ống nào.

Với các ký hiệu như trên, kết quả chính thứ hai trong chương này là định lý dưới đây.

Định lý 2.3.1. *Cho M_P là một mô hình tổng quát thỏa mãn M_P không song chỉnh hình với Q_P và $P(z') > 0$ với mọi $z' \in \mathbb{C}^{n-1} \backslash \{0\}$. Khi đó, nếu M_P là miền WB thì $\operatorname{Aut}(M_P)$ được sinh bởi $\{T_t, S_\lambda : t \in \mathbb{R}, \lambda > 0\} \cup G_P$.*

Như vậy, với các kết quả của chương 2 ta gần như hoàn thành việc mô tả nhóm tự đẳng cấu của mô hình M_P với hàm P dương ngoài gốc toạ độ. Các trường hợp khác, việc mô tả nhóm tự đẳng gặp khó khăn về mặt kĩ thuật và đó là vẫn các bài toán mở.

Chương 3: Trình bày một số vấn đề về dáng điệu biên của hàm squeezing. Trong chương này, chúng tôi trình bày hai kết quả chính.

Để nâng cao sự hiểu biết và các ứng dụng của lớp các hàm song chỉnh hình của các miền phức, việc nghiên cứu về các bất biến song chỉnh hình đã thu hút được nhiều sự chú ý trong hình học vi phân phức. Các phần tử thể tích Carathéodory và Kobayashi-Eisenman, hàm squeezing, bất biến Fridman là các bất biến song chỉnh hình, ngày càng được quan tâm hơn trong những năm gần đây. Trong chương này, chúng tôi cũng xét đến hàm squeezing của một lớp miền giả lồi trong $\mathbb{C}^n$.

Cho Ω là miền trong $\mathbb{C}^n$ và $p \in \Omega$. Với phép nhúng chỉnh hình $f : \Omega \to \mathbb{B}^n$, $f(p) = 0$, chúng ta định nghĩa

$$\sigma_{\Omega,f}(p) := \sup\{r > 0 \colon B(0,r) \subset f(\Omega)\},$$

trong đó $B(z_0, r) \subset \mathbb{C}^n$ ký hiệu cho hình cầu phức bán kính r và tâm tại z_0 và $\mathbb{B}^n$ ký hiệu cho hình cầu đơn vị $B(0,1)$. Khi đó, hàm squeezing $\sigma_\Omega : \Omega \to \mathbb{R}$ được định nghĩa như bởi

$$\sigma_\Omega(p) := \sup_f \{s_{\Omega,f}(p)\}.$$

Lưu ý là $0 < \sigma_\Omega(z) \leq 1$ với mọi điểm $z \in \Omega$.

Cho Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ với biên trơn $\partial\Omega$ và $\xi_0 \in \partial\Omega$. Giả sử rằng $\partial\Omega$ là giả lồi kiểu D'Angelo hữu hạn tại lân cận ξ_0. Trong các nghiên cứu gần đây, các tác giả đã chứng minh rằng nếu p là điểm biên giả lồi chặt thì $\lim\limits_{\Omega \ni z \to p \in \partial\Omega} \sigma_\Omega(z) = 1$. Ngược lại, chúng tôi đặt ra bài toán sau:

Bài toán. Nếu Ω là miền giả lồi bị chặn với biên trơn và nếu $\lim\limits_{j\to\infty} \sigma_\Omega(\eta_j) = 1$ với dãy $\{\eta_j\} \subset \Omega$ nào đó hội tụ tới $p \in \partial\Omega$ thì biên của Ω có giả lồi chặt tại p?

Kết quả chính xung quanh vấn đề này thuộc về A. Zimmer, J. E. Fornæss và F. E. Wold, S. Joo and K. T. Kim, P. Mahajan and K. Verma. Hơn nữa, A. Zimmer đã chứng minh điều khẳng định với miền lồi bị chặn với biên trơn $\mathcal{C}^{2,\alpha}$. J. E. Forness và F. E. Wold đã xây dựng một miền $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ lồi bị chặn có biên trơn lớp $\mathcal{C}^2$ mà không giả lồi chặt, nhưng $\lim\limits_{z\in\Omega \to p \in \partial\Omega} \sigma_\Omega(z) = 1$.

Bây giờ chúng ta xét dãy $\{\eta_j\} \subset \Omega$ hội tụ tới ξ_0. Giả sử rằng $\partial\Omega$ là giả lồi theo kiểu D'Angelo hữu hạn tại lân cận ξ_0 và $\lim\limits_{j\to\infty} \sigma_\Omega(\eta_j) = 1$. Các tác giả đã chứng minh được rằng nếu dãy $\{\eta_j\} \subset \Omega$ hội tụ tới ξ_0 dọc theo pháp tuyến trong của biên $\partial\Omega$ tại ξ_0 thì ξ_0 là giả lồi chặt. Hơn nữa, kết quả này cũng đã đạt được cho trường hợp $\eta_j \subset \Omega$ hội tụ không tiếp xúc tới ξ_0 và cho trường hợp $\eta_j \subset \Omega$ hội tụ $\left(\frac{1}{m_1}, \ldots, \frac{1}{m_{n-1}}\right)$-không tiếp xúc tới điểm biên h-thác triển ξ_0, trong đó $(1, m_1, \ldots, m_{n-1})$ là *đa kiểu Catlin của* $\partial\Omega$ tại ξ_0 và khái niệm *h-thác triển* tại ξ_0 có nghĩa là đa kiểu Catlin và đa kiểu D'Angelo của $\partial\Omega$ tại ξ_0 là trùng nhau.

Phần đầu của chương này, chúng tôi xét miền bị chặn trơn Ω trong $\mathbb{C}^n$ và điểm $\xi_0 \in \partial\Omega$ sao cho $\partial\Omega$ là giả lồi kiểu D'Angelo hữu hạn gần ξ_0 và dạng Levi có đối chiều nhiều nhất bằng 1 tại ξ_0.

Kết quả chính đầu tiên của chương này là định lý sau đây:

Định lý 3.1.1. *Cho Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ với biên trơn, giả lồi. Giả sử ξ_0 là một điểm biên của Ω có kiểu D'Angelo hữu hạn sao cho* *dạng Levi có đối hạng nhiều nhất là 1 tại ξ_0 và tồn tại dãy $\{\varphi_j\} \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$ sao cho $\eta_j = \varphi_j(a) \to \xi_0$ khi $j \to \infty$ với a nào đó thuộc Ω. Khi đó, nếu $\lim\limits_{j\to\infty} \sigma_\Omega(\eta_j) = 1$ thì $\partial\Omega$ là giả lồi chặt tại ξ_0.*

Để phát biểu kết quả chính thứ hai trong chương này, ta cũng nhắc lại rằng $\partial\Omega$ là lồi tuyến tính tại điểm $\xi_0 \in \partial\Omega$ nếu tồn tại lân cận U của ξ_0 sao cho với mọi $z \in \partial\Omega \cap U$ ta luôn có

$$\left(z + T_z^{\mathbb{C}}\partial\Omega\right) \cap (\Omega \cap U) = \emptyset.$$

Kết quả chính thứ hai của chương này là định lý sau đây:

Định lý 3.2.1. *Cho Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ với biên trơn, giả lồi. Giả sử ξ_0 là một điểm biên của Ω có kiểu hữu hạn D'Angelo sao cho $\partial\Omega$ là lồi tuyến tính tại ξ_0 và tồn tại dãy $\{\varphi_j\} \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$ sao cho $\eta_j = \varphi_j(a) \to \xi_0$ khi $j \to \infty$ với a nào đó thuộc Ω. Khi đó, nếu $\lim\limits_{j\to\infty} \sigma_\Omega(\eta_j) = 1$ thì $\partial\Omega$ là giả lồi chặt tại ξ_0.*

Ngoài ra, trong chương này chúng tôi giới thiệu một số kết quả về ước lượng hàm squeezing trên ellipsoid tổng quát. Trước hết, ta cần các kí hiệu sau. Với $s, r \in (0, 1]$ chúng ta định nghĩa D_p^s và $D_p^{s,r}$ lần lượt bởi

$$\begin{aligned} D_P^s &:= \left\{z \in \mathbb{C}^n : |z_n - b|^2 + sP(z') < s^2\right\}; \\ D_P^{s,r} &:= \left\{z \in \mathbb{C}^n : |z_n - b|^2 + \frac{s}{r}P(z') < s^2\right\}, \end{aligned}$$

trong đó $s = 1 - b$. Chúng ta lưu ý rằng $D_P^s = D_P^{s,1}$ và $\lim \psi_j^{-1}(D_P^s) = D_P$ với một dãy $\{\psi_j\} \subset \mathrm{Aut}(D_P)$ nào đó. Định lý sau cho ta ước lượng dưới cho hàm squeezing.

Định lý 3.2.2. *Cho Ω là miền con của D_P sao cho $D_P^s \subset \Omega \subset D_P$ với $s \in (0, 1]$. Khi đó, với mọi $r \in (0, 1)$, tồn tại γ_0 phụ thuộc vào r sao cho*

$$\sigma_\Omega(z) \geq \gamma_0, \forall z \in D_P^{s,r} \cap \Omega.$$

Bây giờ chúng ta xét đến trường hợp $\{a_j\} \subset \Omega \cap U$ hội tụ Λ-tiếp xúc tới $p = 0$ theo nghĩa với mỗi $0 < r < 1$ đều tồn tại $j_r \in \mathbb{N}$ sao cho $a_j \notin D_P^{s,r}$ với mọi $j \geq j_r$. Khi đó, định lý dưới đây chỉ ra rằng hàm squeezing hội tụ tới 1 hạn chế trên dãy điểm hội tụ Λ-tiếp xúc tới điểm $(0', 1)$ nếu $\partial\Omega_j$ có chung lân cận đủ nhỏ của điểm $(0', 1)$ với ∂D_P. Chính xác hơn, chúng tôi còn chứng minh được định lý dưới đây.

Định lý 3.2.3. *Cho $\{\Omega_j\}$ là dãy của miền con của D_P sao cho $\Omega_j \cap U = D_P \cap U$ với $j \geq 1$ với một lân cận cố định U của $(0', 1)$ trong $\mathbb{C}^n$. Cho $\{\eta_j\} \subset D_P \cap U$ là dãy hội tụ Λ-tiếp xúc tới $(0', 1)$. Khi đó, $\lim\limits_{j\to\infty} \sigma_{\Omega_j}(\eta_j) = 1$.*

6. Cấu trúc luận án

Bố cục của luận án ngoài phần mở đầu và phần phụ lục, gồm ba chương, được viết theo tư tưởng kế thừa. Ba chương của luận án được viết dựa trên hai công trình đã được đăng trên hai tạp chí Journal of Geometric Analysis (ISI-Q1) và Journal of the Korean Mathematical Society (ISI-Q3) và một tiền ấn phẩm đã công bố trên trang arXiv.org.

Chương 1: Kiến thức chuẩn bị.

Chương 2: Nhóm tự đẳng cấu của một số miền trong $\mathbb{C}^n$.

Chương 3: Dáng điệu biên của hàm squeezing.

CHƯƠNG 1
KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1 Hàm đa điều hòa dưới

Định nghĩa 1.1.1 (Hàm điều hòa dưới)**.** *Cho $\Omega \subset \mathbb{C}$ là một miền. Một hàm $u : \Omega \to [-\infty, +\infty)$ là điều hòa dưới nếu nó là hàm nửa liên tục trên trong Ω và với mọi $a \in \Omega$, tồn tại $0 < \rho(a) < \operatorname{dist}(a, \partial\Omega)$ sao cho với mọi $0 < r < \rho(a)$, ta có*

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\left(a + re^{i\theta}\right) d\theta.$$

1.2 Khái niệm miền giả lồi

Định nghĩa 1.2.2. *i) Miền $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ với biên trơn lớp $\mathcal{C}^2$ được gọi là giả lồi tại $p \in \partial\Omega$ nếu tồn tại hàm xác định biên ρ, tức là $\Omega \cap U = \{\rho < 0\}$ với U là một lân cận của p, sao cho dạng Levi L_ρ thoả mãn*

$$L_\rho(p)(w) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(p) w_j \overline{w}_k \geq 0$$

với mọi $w \in T_p^{\mathbb{C}}(\partial\Omega)$.

ii) Miền $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ với biên trơn lớp $\mathcal{C}^2$ được gọi là giả lồi chặt tại $p \in \partial\Omega$ nếu tồn tại hàm xác định biên ρ, tức là $\Omega \cap U = \{\rho < 0\}$ với U là một lân cận của p sao cho

$$L_\rho(p)(w) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(p) w_j \overline{w}_k > 0$$

với mọi $w \in T_p^{\mathbb{C}}(\partial\Omega) \setminus \{0\}$.

1.3 Khái niệm kiểu theo nghĩa D'Angelo

Định nghĩa 1.3.1. *Cho $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là một miền với biên trơn lớp $\mathcal{C}^\infty$ và điểm $p \in \partial\Omega$. Khi đó, kiểu D'Angelo $\tau(\partial\Omega, p)$ của $\partial\Omega$ tại p được định* *nghĩa như sau*

$$\tau(\partial\Omega, p) = \sup_{\gamma} \frac{\nu\rho \circ \gamma)}{\nu(\gamma)}.$$

Ở đó, ρ là một hàm xác định biên cho Ω trong một lân cận của p, $\nu(\gamma)$ là cấp triệt tiêu tại 0, supremum được lấy trên tất cả các đường cong chỉnh hình khác hằng $\gamma\colon (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^n, p)$. Ta nói rằng p là điểm có kiểu hữu hạn nếu $\tau(\partial\Omega, p) < \infty$ và là điểm có kiểu vô hạn nếu ngược lại.

1.4 Khái niệm dãy hàm chuẩn tắc và giới hạn của dãy miền

Định nghĩa 1.4.3. *Một hàm φ được gọi là hàm peak đa điều hòa dưới địa phương tại một điểm p thuộc $\partial\Omega$ nếu tồn tại một lân cận U của p trong $\mathbb{C}^n$ sao cho φ là đa điều hòa dưới trên $U \cap \Omega$ liên tục trên $U \cap \overline{\Omega}$ và thỏa mãn*

$$\begin{cases} \varphi(p) = 0 \\ \varphi(z) < 0 \end{cases}$$

với $z \in (U \cap \overline{\Omega}) \backslash \{p\}$.

Chúng ta nhắc lại định nghĩa sau đây mà sẽ được dùng cho các chứng minh ở phần sau

Định nghĩa 1.4.4. *Cho $\{\Omega_j\}_{j=1}^{\infty}$ là dãy các tập mở trong $\mathbb{C}^n$ và Ω_0 là một tập mở trong $\mathbb{C}^n$. Dãy $\{\Omega_j\}_{j=1}^{\infty}$ được gọi là hội tụ tới Ω_0 (và viết là $\lim \Omega_j = \Omega_0$) nếu hai điều kiện sau đây được thoả mãn:*

(i) Với mọi tập compact $K \subset \Omega_0$, tồn tại $j_0 = j_0(K)$ sao cho $K \subset \Omega_j$ với mọi $j \geq j_0$;

(ii) Với mọi tập K compact chứa trong Ω_j với j đủ lớn, ta luôn có $K \subset \Omega_0$.

CHƯƠNG 2

NHÓM TỰ ĐẲNG CẤU CỦA MỘT SỐ MIỀN TRONG $\mathbb{C}^n$

2.1 Một số khái niệm và bổ đề

a) **Hàm Peak tại vô cùng đối với $\mathcal{O}(M_P)$**

Năm 2016, T. Ahn và các cộng sự đã chỉ ra rằng mọi điểm biên của miền M_P đều thừa nhận hàm peak tại vô cùng đối với $\mathcal{O}(M_P)$, trong đó

$$\mathcal{O}(M_P) := \left\{ f : M_P \to \mathbb{C} : f \text{ là chỉnh hình} \right\}.$$

Hệ quả là các metric Kobayashi và Bergman trên M_P là đầy đủ. Thêm nữa, G. Herbort chứng minh được kết quả sau đây:

Định lý 2.1.1 (Herbort)**.** *Cho M_P là miền WB. Khi đó, tồn tại hàm F_∞ chỉnh hình khác không và hằng số $L_* > 0$ và $N \in \mathbb{N}$ sao cho*

(i) $-\dfrac{\pi}{8} \leq \arg \sqrt[N]{F_\infty} \leq \dfrac{\pi}{8}$;

(ii) $L_*^{-1}\hat{\sigma}(z) \leq |F_\infty(z)| \leq L_*\hat{\sigma}(z)$;

(iii) $\dfrac{1}{2}\left(L_*^{-1}\hat{\sigma}(z)\right)^{1/N} \leq \dfrac{1}{2}\left|F_\infty(z)\right|^{1/N} \leq \operatorname{Re}\sqrt[N]{F_\infty(z)} \leq \left(L_*\hat{\sigma}(z)\right)^{1/N}$,

trong đó $\hat{\sigma}(z) := \sum\limits_{j=1}^{n-1} |z_j|^{2m_j} + |z_n|$ *với mọi* $z \in \mathbb{C}^n$.

Nhận xét 2.1.1. Hàm $\varphi(z) := \exp\left(-\frac{1}{\sqrt[N]{F_\infty(z)}}\right)$ là hàm peak tại vô cùng đối với $\mathcal{O}(M_P)$ thỏa mãn điều kiện $\varphi \in \mathcal{O}(M_P), |\varphi(z)| < 1$ với mọi $z \in M_P$ và $\lim\limits_{M_P \ni z \to \infty} \varphi(z) = 1$.

b) **Đa thức thuần nhất theo trọng**

Trong phần còn lại, chúng tôi sẽ nhắc lại một số kết quả đã biết về thác triển giải tích của các song chỉnh hình tới lân cận của một điểm biên cho trước và sau đó chúng tôi sẽ chứng minh bổ đề then chốt được sử dụng trong việc chứng minh kết quả chính thứ hai (Định lý 2.2.1 dưới đây).

Trước hết, chúng tôi định nghĩa tập cụm (cluster) như sau. Nếu $f\colon D \to \mathbb{C}^N$ là hàm chỉnh hình trên miền $D \subset \mathbb{C}^n$ và $z_0 \in \partial D$, ta ký hiệu $\mathcal{C}(f, z_0)$ là tập cụm của f tại z_0 xác định bởi:

$$\mathcal{C}(f, z_0) = \left\{ w \in \mathbb{C}^N : w = \lim f(z_j), z_j \in D, \lim z_j = z_0 \right\}.$$

Bổ đề 2.1.5 (Sukhov)**.** *Giả sử D và G là các miền nhẵn trong $\mathbb{C}^n$. Giả sử thêm rằng D và G lần lượt là giả lồi kiểu hữu hạn trong một lân cận của $z_0 \in \partial D$ và $w_0 \in \partial G$. Cho f là song chỉnh hình từ D vào G sao cho $w_0 \in \mathcal{C}(f, z_0)$. Khi đó, f và f^{-1} lần lượt thác triển trơn lên biên ∂D trong một lân cận nào đó của điểm z_0 và w_0.*

Thực tế, trong luận án này chúng tôi chỉ xét các mô hình giả lồi, kiểu hữu hạn M_P. Do các mô hình này xác định bởi đa thức nên biên ∂M_P là siêu mặt giải tích thực. Vì thế, các song chỉnh hình giữa các mô hình này có thể thác triển chỉnh hình qua điểm biên. Cụ thể, ta nhắc lại định lý sau đây.

Định lý 2.1.2 (Diederich-Pinchuk)**.** *Cho $M \subset W \subset \mathbb{C}^n$ (tương ứng $M' \subset W' \subset \mathbb{C}^n$) là hai siêu mặt thực, giải tích thực, giả lồi, kiểu hữu hạn trong lân cận W (tương ứng W') trong $\mathbb{C}^n$ và cho $f\colon M \to M'$ là CR-ánh xạ liên tục. Khi đó, f thác triển thành hàm chỉnh hình trên lân cận của M.*

Bây giờ, chúng tôi chứng minh mệnh đề, đóng vai trò chính trong chứng minh kết quả chính thứ hai (Định lý 2.2.1 dưới đây).

Mệnh đề 2.1.1. *Cho M_P và M_Q là hai miền WB. Giả sử $\psi : M_P \to M_Q$ là một song chỉnh hình. Khi đó, tồn tại $t_0 \in \mathbb{R}$ và $z_0 \in \partial M_Q$ sao cho ψ và ψ^{-1} lần lượt thác triển chỉnh hình lên các lân cận của $(0, it_0)$ và z_0.*

2.2 Nhóm tự đẳng cấu của mô hình D_P và Q_P

Phần này dành cho sự mô tả dạng hiện của các nhóm tự đẳng cấu của các miền đặc biệt D_P và Q_P, lần lượt được định nghĩa bởi

$$\begin{aligned} D_P &:= \left\{(z', z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_n|^2 + P(z') < 1\right\}; \\ Q_P &:= \{(z', z_n) \in \mathbb{C}^n : \mathrm{Re}(z_n) + P(z') < 0\}, \end{aligned}$$

trong đó

$$P\left(z'\right) = \sum_{wt(K)=wt(L)=1/2} a_{KL} {z'}^K \bar{z}'^L,$$

trong đó $a_{KL} \in \mathbb{C}$ với $a_{KL} = \bar{a}_{KL}$.

Kết quả chính thứ nhất trong chương này là:

Định lý 2.2.1. *Cho P là đa thức thực đa điều hòa dưới thuần nhất theo trọng trên $\mathbb{C}^{n-1}$ với giả thiết thêm rằng $P(z') > 0$ với mọi $z' \in \mathbb{C}^{n-1} \setminus \{0\}$. Khi đó, $\mathrm{Aut}(D_P)$ được sinh bởi G_P và $\{\phi_{a,\theta} \colon a \in \Delta, \theta \in \mathbb{R}\}$, trong đó $\phi_{a,\theta}$ xác định bởi*

$$\left(z', z_n\right) \mapsto \left(\frac{\left(1 - |a|^2\right)^{1/2m_1}}{\left(1 - \bar{a} z_n\right)^{1/m_1}} z_1, \ldots, \frac{\left(1 - |a|^2\right)^{1/2m_{n-1}}}{\left(1 - \bar{a} z_n\right)^{1/m_{n-1}}} z_{n-1}, e^{i\theta} \frac{z_n - a}{1 - \bar{a} z_n} \right),$$

trong đó $a \in \Delta$ và $\theta \in \mathbb{R}$.

2.3 Tự đẳng cấu của mô hình kiểu hữu hạn

Trong phần này, chúng tôi chứng minh Định lý 2.3.2 dưới đây; đó là kết quả nghiên cứu chính thứ hai trong chương này. Trước tiên, chúng tôi nhắc lại một vài ký hiệu và khái niệm.

Đặt S_λ $(\lambda > 0), T_s$ $(s \in \mathbb{R})$ là các tự đẳng cấu của M_P lần lượt được xác định bởi

$$S_\lambda(z) = \left(\lambda^{1/2m_1} z_1, \ldots, \lambda^{1/2m_{n-1}} z_{n-1}, \lambda z_n\right); T_s(z) = \left(z', z_n + is\right).$$

Định nghĩa 2.3.1. *Một mô hình M_P được gọi là ống (hoặc tròn xoay) nếu M_P là song chỉnh hình với mô hình $M_{\widetilde{P}}$, trong đó đa thức thuần nhất theo trọng $\widetilde{P}$ thỏa mãn*

$$\begin{aligned}\widetilde{P}\left(z_1,\ldots,z_{n-1}\right) &= \widetilde{P}\left(\mathrm{Im} z_1, z_2,\ldots,z_{n-1}\right)\\ &\quad (\textit{ tương ứng } \widetilde{P}\left(z_1, z_2,\ldots,z_{n-1}\right)\\ &\quad = \widetilde{P}\left(\left|z_1\right|, z_2,\ldots,z_{n-1}\right))\end{aligned}$$

với mọi $z' \in \mathbb{C}^{n-1}$.

Định nghĩa 2.3.2. *Mô hình M_P được gọi là tổng quát nếu nó không song chỉnh hình với mô hình tròn xoay hoặc mô hình ống nào.*

Kết quả chính thứ hai trong chương này là định lý sau đây:

Định lý 2.3.2. *Cho M_P là một mô hình tổng quát thỏa mãn M_P không song chỉnh hình với Q_P và $P(z') > 0$ với mọi $z' \in \mathbb{C}^{n-1}\backslash\{0\}$. Nếu M_P là miền WB thì $\mathrm{Aut}(M_P)$ được sinh bởi:*

$$\{T_t, S_\lambda : t \in \mathbb{R}, \lambda > 0\} \cup G_P.$$

2.4 Một số ví dụ minh họa cho kết quả chính

Ví dụ 2.4.1. Cho $E_{1,m}$ là Ellipsoid

$$E_{1,m} := \left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_2|^2 + |z_1|^{2m} < 1\right\}, m \geq 2.$$

Với Ellipsoid $E_{1,m}$, đa thức P được cho bởi $P\left(z_1\right) = \left|z_1\right|^{2m}$. Khi đó, $P\left(f_1\left(z_1\right)\right) \equiv P\left(z_1\right)$ khi và chỉ khi $f_1\left(z_1\right) = e^{i\theta} z_1$ với $\theta \in \mathbb{R}$. Vì vậy, Định lý 2.2.1 suy ra rằng $\mathrm{Aut}\left(E_{1,m}\right)$ bằng tập

$$\left\{(z_1, z_2) \mapsto \left(e^{i\theta_1}\frac{\left(1-|a|^2\right)^{1/2m}}{\left(1-\bar{a}z_2\right)^{1/m}} z_1, e^{i\theta_2}\frac{z_2-a}{1-\bar{a}z_2}\right) : |a| < 1, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}\right\}.$$

Ngoài ra, chúng tôi còn ra ba ví dụ nữa.

CHƯƠNG 3
DÁNG ĐIỆU BIÊN CỦA HÀM SQUEEZING

3.1 Dáng điệu biên của hàm squeezing gần điểm biên có đối hạng của dạng Levi bằng 1

3.1.1 Dãy scaling trong miền nhiều chiều

Trong mục này, giả sử ξ_0 là một điểm biên của miền $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ có kiểu D'Angelo hữu hạn sao cho dạng Levi có đối hạng nhiều nhất là 1 tại ξ_0. Gọi $2m$ là kiểu D'Angelo của $\partial\Omega$ tại ξ_0. Không mất tính tổng quát, chúng ta giả sử rằng $\xi_0 = 0 \in \mathbb{C}^n$ và hạng của dạng Levi tại ξ_0 là bằng $n-2$. Cho ρ là hàm xác định biên cho miền Ω. Sau khi đổi hệ trục tọa độ, chúng ta có thể tìm được các hàm tọa độ $z_1, \ldots, z_n$ xác định trên lân cận của U_0 của ξ_0 sao cho:

$$\begin{aligned}\rho(z) =& \operatorname{Re}(z_n) + \sum_{\substack{j+k\leq 2m\\ j,k>0}} a_{j,k} z_1^j \bar{z}_1^k \\ &+ \sum_{\alpha=2}^{n-1} |z_\alpha|^2 + \sum_{\alpha=2}^{n-1} \sum_{\substack{j+k\leq m\\ j,k>0}} \operatorname{Re}\left(\left(b_{j,k}^\alpha z_1^j \bar{z}_1^k\right) z_\alpha\right) \\ &+ O\left(|z_n|\,|z| + |z^*|^2 |z| + |z^*|^2 |z_1|^{m+1} + |z_1|^{2m+1}\right),\end{aligned}$$

trong đó $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $z^* = (0, z_2, \ldots, z_{n-1}, 0)$, và $a_{j,k}, b_{j,k}^\alpha (2 \leq \alpha \leq n-1)$ là các hàm trơn lớp $\mathcal{C}^\infty$ trong một lân cận đủ nhỏ tại gốc tọa độ trong $\mathbb{C}^n$.

S. Cho đã chỉ ra rằng, với mỗi điểm η trong một lân cận đủ nhỏ tại gốc tọa độ, tồn tại duy nhất một song chỉnh hình Φ_η của $\mathbb{C}^n, z =$

$\Phi_\eta^{-1}(w)$ sao cho

$$\begin{aligned}\rho\left(\Phi_\eta^{-1}(w)\right) - \rho(\eta) = \mathrm{Re}\,(w_n) &+ \sum_{\substack{j+k\le 2m\\ j,k>0}} a_{j,k}(\eta) w_1^j \bar{w}_1^k \\ &+ \sum_{\alpha=2}^{n-1} |w_\alpha|^2 + \sum_{\alpha=2}^{n-1} \sum_{\substack{j+k\le m\\ j,k>0}} \mathrm{Re}\left[\left(b_{j,k}^\alpha(\eta) w_1^j \bar{w}_1^k\right) w_\alpha\right] \\ &+ O\left(|w_n|\,|w| + |w^*|^2\,|w| + |w^*|^2\,|w_1|^{m+1} + |w_1|^{2m+1}\right),\end{aligned} \tag{3.1}$$

trong đó $w^* = (0, w_2, \ldots, w_{n-1}, 0)$.

Bây giờ, ta ký hiệu như sau:

$$\begin{aligned}&A_l(\eta) = \max\left\{|a_{j,k}(\eta)| : j+k = l\right\} (2 \le l \le 2m),\\ &B_{l'}(\eta) = \max\left\{\left|b_{j,k}^\alpha(\eta)\right| : j+k = l', 2 \le \alpha \le n-1\right\} \left(2 \le l' \le m\right).\end{aligned} \tag{3.2}$$

Với mỗi $\delta > 0$ chúng ta định nghĩa $\tau(\eta, \delta)$ như dưới đây:

$$\tau(\eta,\delta) = \min\left\{(\delta/A_l(\eta))^{1/l}, \left(\delta^{\frac{1}{2}}/B_{l'}(\eta)\right)^{1/l'} : 2 \le l \le 2m, 2 \le l' \le m\right\}.$$

Ta định nghĩa phép co giãn đặc biệt Δ_η^ϵ cho bởi

$$\Delta_\eta^\epsilon(w_1, \ldots, w_n) = \left(\frac{w_1}{\tau_1(\eta,\epsilon)}, \ldots, \frac{w_n}{\tau_n(\eta,\epsilon)}\right),$$

trong đó $\tau_1(\eta,\epsilon) = \tau(\eta,\epsilon), \tau_k(\eta,\epsilon) = \sqrt{\epsilon}\ (2 \le k \le n-1), \tau_n(\eta,\epsilon) = \epsilon$.

Với mỗi $\eta \in \partial\Omega$, nếu chúng ta đặt

$$\rho_\eta^\epsilon(w) = \epsilon^{-1} \rho \circ \Phi_\eta^{-1} \circ \left(\Delta_\eta^\epsilon\right)^{-1}(w)$$

thì ta suy ra rằng

$$\rho_\eta^\epsilon(w) = \mathrm{Re}\,(w_n) + \sum_{\substack{j+k\leq 2m\\ j,k>0}} a_{j,k}(\eta)\epsilon^{-1}\tau(\eta,\epsilon)^{j+k} w_1^j \bar{w}_1^k + \sum_{\alpha=2}^{n-1}|w_\alpha|^2$$
$$+\sum_{\alpha=2}^{n-1}\sum_{\substack{j+k\leq m\\ j,k>0}} \mathrm{Re}\left(b_{j,k}^\alpha(\eta)\epsilon^{-1/2}\tau(\eta,\epsilon)^{j+k} w_1^j\bar{w}_1^k w_\alpha\right) + O(\tau(\eta,\epsilon)). \tag{3.3}$$

Tiếp theo, chúng ta cố định một lân cận đủ nhỏ U_0 của ξ_0 và đặt $\{\eta_j\}\subset\Omega$ là dãy hội tụ tới ξ_0. Hơn nữa, chúng ta cũng giả sử rằng $\eta_j \in U_0^- := U_0 \cap \{\rho < 0\}$ với mọi j. Ứng với dãy $\{\eta_j\}$, ta có một dãy liên kết $\eta'_j = \left(\eta_{1j},\ldots,\eta_{(n-1)j},\eta_{nj}+\epsilon_j\right), \epsilon_j > 0, \eta'_j$ thuộc siêu mặt $\{\rho = 0\}$. Chúng ta xét đến dãy phép co giãn $\Delta_{\eta'_j}^{\epsilon_j}$. Khi đó,

$$\Delta_{\eta'_j}^{\epsilon_j}\circ\Phi_{\eta'_j}(\eta_j) = (0,\ldots,0,-1).$$

Hơn nữa, từ (3.3) ta suy ra rằng

$$\Delta_{\eta'_j}^{\epsilon_j}\circ\Phi_{\eta'_j}(\{\rho=0\})$$

được xác định bởi

$$\mathrm{Re}\,(w_n) + P_{\eta'_j}(w_1,\bar{w}_1) + \sum_{\alpha=2}^{n-1}|w_\alpha|^2 + \sum_{\alpha=2}^{n-1}\mathrm{Re}\left(Q_{\eta'_j}^\alpha(w_1,\bar{w}_1)\,w_\alpha\right) = O\left(\tau\left(\eta'_j,\epsilon_j\right)\right),$$

trong đó

$$P_{\eta'_j}(w_1,\bar{w}_1) := \sum_{\substack{j+k\leq 2m\\ j,k>0}} a_{j,k}\left(\eta'_j\right)\epsilon_j^{-1}\tau\left(\eta'_j,\epsilon_j\right)^{j+k} w_1^j\bar{w}_1^k,$$
$$Q_{\eta'_j}^\alpha(w_1,\bar{w}_1) := \sum_{\substack{j+k\leq m\\ j,k>0}} b_{j,k}^\alpha\left(\eta'_j\right)\epsilon_j^{-1/2}\tau\left(\eta'_j,\epsilon_j\right)^{j+k} w_1^j\bar{w}_1^k.$$

Do đó, sau khi chọn một dãy con, ta có thể suy ra rằng $\Delta^{\epsilon_j}_{\eta'_j} \circ \Phi_{\eta'_j}\left(U_0^-\right)$ hội tụ tới mô hình sau đây

$$M_P := \left\{ \hat{\rho} := \mathrm{Re}\,(w_n) + P\,(w_1, \bar{w}_1) + \sum_{\alpha=2}^{n-1} |w_\alpha|^2 < 0 \right\}, \tag{3.4}$$

trong đó $P\,(w_1, \bar{w}_1)$ là đa thức có bậc $\leq 2m$, không chứa hạng tử điều hòa.

Nhận xét 3.1.1. M_P đã được biết đến là giới hạn của miền giả lồi $\Delta^{\epsilon_j}_{\eta'_j} \circ \Phi_{\eta'_j}\left(U_0^-\right)$. Do đó, M_P trở thành miền giả lồi. Bởi vậy, hàm $\hat{\rho}$ trong (3.4) là đa điều hòa dưới, và do đó P là đa thức điều hòa dưới mà có toán tử Laplace không triệt tiêu khắp nơi.

3.1.2 Tính chuẩn tắc của dãy scaling

Phần này trình bày hai mệnh đề quan trọng và giới thiệu kết quả chính đầu tiên của chương là định lý sau đây:

Mệnh đề 3.1.1 (Đ.Đ. Thái và N.V.Thu)**.** *Cho Ω là một miền trong $\mathbb{C}^n$. Giả sử rằng $\partial\Omega$ là giả lồi, kiểu D'Angelo hữu hạn và $\mathcal{C}^\infty$-trơn trong lân cận điểm biên $(0, \ldots, 0) \in \partial\Omega$. Giả sử dạng Levi có đối hạng lớn nhất bằng* 1 *tại* $(0, \ldots, 0)$*. Cho D là một miền trong $\mathbb{C}^k$ và $\varphi_j : D \to \Omega$ là dãy các ánh xạ chỉnh hình sao cho $\eta_j := \varphi_j(a)$ hội tụ tới* $(0, \ldots, 0)$ *với điểm a nào đó thuộc D. Khi đó, $\{T_j \circ \varphi_j\}$, với $T_j = \Delta^{\epsilon_j}_{\eta'_j} \circ \Phi_{\eta'_j}$, là chuẩn tắc và giới hạn của nó là các ánh xạ chỉnh hình từ D vào mô hình*

$$M_P = \left\{ (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n : \mathrm{Re}\,(w_n) + P\,(w_1, \bar{w}_1) + \sum_{\alpha=2}^{n-1} |w_\alpha|^2 < 0 \right\},$$

trong đó $P \in \mathcal{P}_{2m}$.

Định lý 3.1.1. *Cho Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ với biên trơn, giả lồi. Giả sử ξ_0 là một điểm biên của Ω có kiểu D'Angelo hữu hạn sao cho dạng Levi có đối hạng nhiều nhất là 1 tại ξ_0 và tồn tại dãy $\{\varphi_j\} \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$ sao cho $\eta_j = \varphi_j(a) \to \xi_0$ khi $j \to \infty$ với a nào đó thuộc Ω. Khi đó, nếu $\lim\limits_{j\to\infty} \sigma_\Omega(\eta_j) = 1$ thì $\partial\Omega$ là giả lồi chặt tại ξ_0.*

3.2 Dáng điệu biên của hàm squeezing gần điểm biên lồi tuyến tính

3.2.1 Một số bổ đề kỹ thuật

Bổ đề 3.2.1. *Cho $\{\psi_j\} \subset \mathrm{Aut}(D_P)$ là dãy các tự đẳng cấu*

$$\psi_j(z,w) = \left(\frac{\sqrt[2m_1]{1-|a_j|^2}}{\sqrt[m_1]{1+\bar{a}_j z_n}} z_1, \ldots, \frac{\sqrt[2m_{n-1}]{1-|a_j|^2}}{\sqrt[m_{n-1}]{1+\bar{a}_j z_n}} z_{n-1}, \frac{z_n + a_j}{1+\bar{a}_j z_n}\right),$$

trong đó $a_j \in (0,1)$ với $\lim a_j = 1$. Khi đó, với $s \in (0,1)$ chúng ta có $\psi_j^{-1}(D_P^s) \to D_P$ khi $j \to \infty$. Thêm nữa, với $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2}$ và với lân cận U bất kỳ của $(0',1)$ trong $\mathbb{C}^n$, tồn tại số nguyên dương $j_0 \geq 1$ sao cho $\overline{D_P} \backslash B((0',-1),\varepsilon) \subset \psi_j^{-1}\left(\overline{D_P} \cap U\right)$ với mọi $j \geq j_0$.

3.2.2 Hàm squeezing đối với miền lồi tuyến tính

Mục đích đầu tiên của phần này là chứng minh đinh lý sau đây:

Định lý 3.2.1. *Cho Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ với biên trơn, giả lồi. Giả sử ξ_0 là một điểm biên của Ω theo kiểu hữu hạn D'Angelo sao cho $\partial\Omega$ là lồi tuyến tính tại ξ_0 và tồn tại dãy $\{\varphi_j\} \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$ sao cho $\eta_j = \varphi_j(a) \to \xi_0$ khi $j \to \infty$ với a nào đó thuộc Ω. Khi đó, nếu $\lim\limits_{j\to\infty} \sigma_\Omega(\eta_j) = 1$ thì $\partial\Omega$ là giả lồi chặt tại ξ_0.*

Với $s, r \in (0,1]$, ta định nghĩa các miền D_p^s và $D_p^{s,r}$ lần lượt bởi

$$\begin{aligned} D_P^s &:= \left\{z \in \mathbb{C}^n : |z_n - b|^2 + sP(z') < s^2\right\}; \\ D_P^{s,r} &:= \left\{z \in \mathbb{C}^n : |z_n - b|^2 + \frac{s}{r}P(z') < s^2\right\}, \end{aligned}$$

trong đó $s = 1 - b$. Chúng ta lưu ý rằng $D_P^s = D_P^{s,1}$ và $\lim \psi_j^{-1}(D_P^s) = D_P$ với họ bất kì $\{\psi_j\} \subset \operatorname{Aut}(D_P)$ đóng vai trò quan trọng trong việc chứng minh các kết quả chính dưới đây.

Định lý 3.2.2. *Cho Ω là miền con của D_P sao cho $D_P^s \subset \Omega \subset D_P$ với $s \in (0, 1]$. Khi đó, với mọi $r \in (0, 1)$, tồn tại γ_0 phụ thuộc vào r sao cho*

$$\sigma_\Omega(z) \geq \gamma_0, \forall z \in D_P^{s,r} \cap \Omega.$$

Bây giờ chúng ta xét đến trường hợp $\{a_j\} \subset \Omega \cap U$ hội tụ Λ-tiếp xúc tới $p = 0$ theo nghĩa với mỗi $0 < r < 1$ đều tồn tại $j_r \in \mathbb{N}$ sao cho $a_j \notin D_P^{s,r}$ với mọi $j \geq j_r$. Khi đó, định lý dưới đây chỉ ra rằng hàm squeezing hội tụ tới 1 trên dãy điểm hội tụ Λ-tiếp xúc đến $(0', 1)$. Chính xác hơn, chúng tôi chứng minh định lý dưới đây.

Định lý 3.2.3. *Cho $\{\Omega_j\}$ là dãy của miền con của D_P sao cho $\Omega_j \cap U = D_P \cap U$ với $j \geq 1$ với một lân cận cố định U của $(0', 1)$ trong $\mathbb{C}^n$. Cho $\{\eta_j\} \subset D_P \cap U$ là dãy hội tụ Λ-tiếp xúc tới $(0', 1)$. Khi đó, $\lim\limits_{j \to \infty} \sigma_{\Omega_j}(\eta_j) = 1$.*

Ví dụ 3.2.1. Cho $E_{1,2} = \left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_2|^2 + |z_1|^4 < 1\right\}$. Xét dãy

$$a_n = \left(\sqrt[4]{\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}}, 1 - \frac{1}{n}\right) \to (0, 1) \text{ khi } n \to \infty$$

và dãy các tự đẳng cấu $\psi_n \in \operatorname{Aut}(E_{1,2})$ cho bởi

$$\psi_n(z) = \left(\frac{\left(1 - |a_{n2}|^2\right)^{1/4}}{(1 - \bar{a}_{n2} z_2)^{1/2}} z_1, \frac{z_2 - a_{n2}}{1 - \bar{a}_{n2} z_2}\right).$$

Khi đó, chúng tôi chỉ ra rằng $\sigma_{E_{1,2}}(a_n) = \sigma_{E_{1,2}}(\psi_n(a_n)) \to 1$ khi $n \to \infty$. Tuy nhiên, điểm biên $(0, 1)$ là giả lồi yếu.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Kết luận

Các kết quả chính của luận án:

1) Mô tả nhóm tự đẳng cấu của mô hình kiểu hữu hạn trong $\mathbb{C}^n$ xác định bởi:

$$M_P = \{z \in \mathbb{C}^n : \mathrm{Re}(z_n) + P(z') < 0\},$$

trong đó P là đa thức thực đa điều hòa dưới thuần nhất theo trọng trên $\mathbb{C}^{n-1}$ và không chứa hạng tử điều hòa.

2) Chứng minh rằng nếu hàm squeezing dần đến 1 tại điểm biên tụ quỹ đạo $\xi_0 \in \partial\Omega$ với biên $\partial\Omega$ trơn, giả lồi, có kiểu D'Angelo hữu hạn và có đối hạng của dạng Levi nhiều nhất bằng 1 tại ξ_0 thì ξ_0 giả lồi chặt.

3) Chứng minh rằng nếu hàm squeezing dần đến 1 tại điểm biên tụ quỹ đạo $\xi_0 \in \partial\Omega$ với biên $\partial\Omega$ trơn, lồi tuyến tính, có kiểu D'Angelo hữu hạn tại ξ_0 thì ξ_0 giả lồi chặt.

4) Đưa ra ước lượng dưới cho hàm squeezing cho miền Elipsoid tổng quát.

Kiến nghị về những nghiên cứu tiếp theo

Luận án đã đạt được một số kết quả nghiên cứu mới về tính chất hình học của miền trong $\mathbb{C}^n$ với nhóm tự đẳng cấu không compact. Tuy nhiên, vẫn còn nhiều vấn đề cần được mở rộng và tiếp tục nghiên cứu sâu hơn để mô tả nhóm tự đẳng cấu của miền trong $\mathbb{C}^n$ và mô tả dáng điệu biên của hàm squeezing của miền kiểu hữu hạn trong $\mathbb{C}^n$.

DANH MỤC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC CỦA TÁC GIẢ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

1. Ninh Van Thu, Nguyen Thi Lan Huong, Tran Quang Hung, Kim Hyeson (2019), *On the automophism Groups of Finite Multitype models in C^n*, Journal of Geometric Analysis, January 2019, Volume 29, Issue 1, pp. 428–450 (ISI-Q1).

2. Hyeseon Kim, Anh Duc Mai, Thi Lan Huong Nguyen, Van Thu Ninh, *A note on the boundary behaviour of the squeezing function and Fridman invariant*, Bulletin of the Korean Mathematical Society, 2020, Volume 57, Issue 5, pp. 1241–1249 (ISI-Q3).

3. Ninh Van Thu, Nguyen Thi Lan Huong, Nguyen Quang Dieu, *On the bounary behaviour of the squeezing function near linearly convex boundary points*, https://arxiv.org/abs/2209.14168.

CÁC KẾT QỦA TRONG LUẬN ÁN ĐÃ ĐƯỢC BÁO CÁO TẠI CÁC HỘI NGHỊ, HỘI THẢO

1. Báo cáo "On the automorphism group of finite multitype model in $\mathbb{C}^n$", Trường hè Giải tích và Hình học, Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng, 11-14/06/2020.

2. Báo cáo "A note on the boundary behaviour of the squeezing function and Fridman invariant", Hội nghị "Một số chủ đề thời sự trong toán học và ứng dụng", Trường Đại học KHTN - Đại học Quốc gia Hà Nội, 30-31/10/2021.